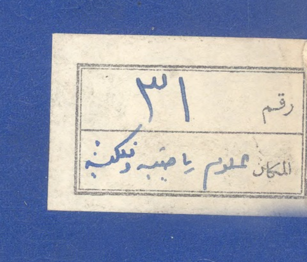


فهرست

كتاب القواعـــد الجليـــة

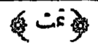
فى الاعمال الجبرية

فهرست كتاب القواعد الجلية فى الاعمال الجبرية

صحيفة

صحيفة

صحيفة





كتاب

القواعد الجلية فى الاعمال الجبرية

تأليف

محمد افندى ادريس

مدرس الرياضة بقسم المعلمين العربى بمدرسة الناصرية

﴿ الطبعة الاولى ﴾

بالمطبعة الكبرى الأميرية ببولاق مصر المحمية

سنة ١٣١٨ هـ / ١٩٠٠ م

(بالقسم الادبى)



بسم الله الرحمن الرحيم

بحمدك اللهم أستفتح باب المقال وبشكرك أستمنح بلوغ الآمال سبحانك جلت آلاؤك عن العد وتوالت نعماؤك فلا يقابلها شكر أحد حدود قدرتك لاتدركها الافهام ومكررات جودك تقصرعن حصرها الاقلام اللهم يامن أمره بين الكاف والنون واذا أراد شيأ أن يقول له كن فيكون نسألك من صلات صلواتك أسناها ومن تسنيم تسليماتك أزكاها على سيدنا محمد أس الكمال ومنبع الخير والافضال من رفعت درجته بين المقربين وفضلته على جميع الانبياء والمرسلين وأشرت له فى كتابك المبين بطه وياسين وعلى آله وأصحابه وعترته وأحبابه الذين محوا بعزمهم جذور الشرك والفساد وارتفعت رتبتهم عن مساواة من يطاولهم من العباد

(أما بعد) فلما كان علم الجبر من الفنون الجليلة القدر اذ لاتخفى مزيته ولاتنكر فضيلته فكم له من المآثر المرضيات

على علوم الرياضيات خصوصا فى حل المشكلات واستخراج المجهولات وكنت ممن انتدب لتدريس العلوم الرياضيه للطلبة الازهريه ورأيت شدة شغفهم بهذه العلوم وتسابقهم فى مضمار المنطوق منها والمفهوم جمعت مختصرا فى هذا العلم يشرح مسائله ويقرب مقاصده ووسائله فجاء بحمد الله وفق المرام فى هذا المقام وهو وان صغر حجمه فقد كبر علمه والله الكريم أسأل وبنبيه الهادى أتوسل أن ينفع به الطلاب وينيلنى بقبوله أجزل الثواب وذلك فى ظل من أنالنا من العلوم الامانى أفندينا (عباس باشا حلمى الثانى) أيد الله دولته وأعلى كلمته وحفظ أنجاله الكرام بجاه النبى عليه السلام

مقدمة

(١) تعريف ـ الجبر هو علم يبحث فيه عن حل المسائل العددية بطرق مختصرة عامة

ويتوصل الى ذلك باستعمال الحروف والاشارات

(٢) استعمال الحروف ـ تستعمل الحروف للدلالة على الكميات فالحروف ا , ب , ح , ى , هـ , ... الخ تستعمل عادة للدلالة على الكميات المعلومة والحروف س و ص و ع و ... الخ تستعمل للدلالة على الكميات المجهولة

وقد يوضع فوق الحروف هذه العلامات (ً ً ً) مثل بً وبً , بً وينطق بها ب أولى و ب ثانية و ب ثالثة وتستعمل

للدلالة على مقادير متشابهة

وقد يوضع تحت الحروف أرقام مثل $ب_١$ و $ب_٢$ و $ب_٣$ وينطق بها ب تحتها واحد و ب تحتها ٢ و ب تحتها ٣ وتستعمل للدلالة على مقادير متشابهة

ولا تتقيد الحروف على اختلافها بمقادير خصوصية لكل حرف

(٢) استعمال الاشارات ـ تستعمل الاشارات للدلالة على العمليات اللازم اجراؤها على الكميات وعلى الارتباطات الواقعة بين تلك الكميات

والاشارات الجبرية هى المستعملة فى علم الحساب ولنأت بها لزيادة الايضاح فنقول

أولا + علامة الجمع ويلفظ بها زائد فكتابة حـ + ى تدل على لزوم جمع الكميتين حـ ، ى

ثانيا ـ علامة الطرح ويلفظ بها ناقص فكتابة حـ ـ ى تدل على لزوم طرح ى من حـ

ثالثا × ، . علامتا الضرب ويلفظ بكل منهما فى فكتابة حـ × ى أو حـ . ى تدل على لزوم ضرب حـ فى ى ولا تستعمل العلامة الثانية (.) اذا كانت الكميات مبينة بأرقام وقد يكتب المضروبان بدون علامة فكتابة حـ ى تدل على لزوم ضرب حـ فى ى ولا يستعمل ذلك اذا كانت الكميات مبينة بأرقام أيضا

واذا كان أحد المضروبين أو كلاهما مركبا من مجموع أو فرق كميتين أو كميات لزم وضعه بين قوسين

فلبيان أن مجموع الكميتين ح ، ء مضروب فى ب يكتب (ح + ء) ب ولبيان أن مجموع الكميات ب و ح و ء مضروب فى الفرق بين هـ و و يكتب (ب + ح + ء) (هـ — و)

رابعاً ÷ أو : أو — علامات القسمة ويلفظ بكل منها على فكتابة ح ÷ ء أو ح : ء أو $\frac{ح}{ء}$ تدل على لزوم قسمة ح على ء

خامساً $\sqrt{}$ علامة الجذر فكتابة $\sqrt{ح}$ تدل على لزوم استخراج الجذر التربيعى لكمية ح

واذا كان المراد استخراج الجذر التكعيبى أو الرابع أو الخامس وهكذا فيكتب فى فتحة العلامة ٣ أو ٤ أو ٥ الخ

وهذا العدد يسمى دليل الجذر فكتابة $\sqrt[٥]{ح}$ تدل على لزوم استخراج الجذر الخامس لكمية ح

سادساً = علامة التساوى ويلفظ بها يساوى فكتابة ح = ء + هـ تدل على أنه كمية ح تساوى لمجموع ء ، هـ

سابعاً > < علامتا التباين ويلفظ بالاولى أكبر وبالثانية أصغر

فكتابة ح > ء تدل على أن كمية ح أكبر من ء وكتابة ء < ح تدل على أن كمية ء أصغر من ح

(فى هاتين العلامتين يكون المقدار الاكبر داخل الزاوية)

(٤) القوة والاس — قوة الكمية هى حاصل ضرب عدة عوامل فى بعضها مساوية لهذه الكمية

وتميز القوى بعدد المضاريب فحاصل ضرب ح × ح تسمى القوة الثانية لكمية ح أو مربع ح وحاصل ضرب ح × ح × ح يسمى القوة الثالثة لكمية ح أو مكعب ح وحاصل ضرب ح × ح × ح × ح يسمى القوة الرابعة لكمية ح . وللاختصار تكتب الكمية ويكتب فوقها عدد يدل على عدد عواملها المتساوية وهذا العدد يسمى أسا

فالقوة الثانية لكمية ح تكتب $ح^٢$ وتقرأ ح تربيع والقوة الثالثة لهذه الكمية تكتب $ح^٣$ وتقرأ ح تكعيب والقوة الرابعة لها تكتب $ح^٤$ وتقرأ ح أس ٤ والقوة الخامسة تكتب $ح^٥$ وتقرأ ح أس ٥ وهكذا

تنبيه كل كمية ليس لها أس يعتبر الواحد اسالها

(٥) المكرر — مكرر الكمية هو عدد يكتب قبل الكمية فيدل على عدد مرات تكرارها

فكتابة ٥ ى تدل على ى + ى + ى + ى + ى

فالمكرر هو عدد مضروب فى كمية

تنبيه كل كمية ليس لها مكرر يعتبر الواحد مكررالها

(٦) ولنذكر مثالا نبين منه أن استعمال الاشارات واسطة فى الاختصار وأن استعمال الحروف واسطة فى التعميم فنقول

مسألة المطلوب تقسيم $\frac{ص}{١٦٤}$ بين ثلاثة أشخاص بحيث ان الاول يأخذ زيادة عن الثانى $\frac{ص}{١٤}$ وان الثانى يأخذ زيادة عن الثالث $\frac{ص}{٣٠}$

أولا نشتغل بالحل بدون استعمال اشارات ولا حروف بان نقول حيث ان نصيب الثانى مساو لنصيب الثالث مضافا اليه ص ٣٠ وان نصيب الاول يساوى نصيب الثانى مضافا اليه ص ١٤ فيكون نصيب الاول يساوى نصيب الثالث مضافا اليه ص ١٤ و ص ٣٠ أى ص ٤٤ وحينئذ يكون ص ١٩٤ مشتملا على ثلاثة أمثال نصيب الثالث مضافا اليه مقدار زيادة نصيب الثانى عنه وهو ص ٣٠ ومقدار زيادة نصيب الاول عنه وهو ص ٤٤ أى مضافا اليه ص ٧٤ فاذا طرح ص ٧٤ من ص ١٩٤ كان الباقى ص ١٢٠ مساويا لثلاثة أمثال نصيب الثالث فيكون ثلثه ص ٤٠ هو نصيب الثالث وأما نصيب الثانى فهو ص ٤٠ مضافا اليه ص ٣٠ أى ص ٧٠ ونصيب الاول ص ٧٠ مضافا اليه ص ١٤ أى ص ٨٤

ثانيا ــ نشتغل بالحل مع استعمال اشارات ولذلك نرمز لنصيب الثالث بحرف س فيكون

نصيب الثالث = س

و نصيب الثانى = س + ٣٠

و نصيب الاول = س + ٣٠ + ١٤

ويكون مجموع الثلاثة أنصبة يساوى ١٩٤ أى

س + س + ٣٠ + س + ٣٠ + ١٤ = ١٩٤ أو

٣ س + ٧٤ = ١٩٤ فاذا طرحنا من طرفى هذه المتساوية ٧٢ ينتج

٣ س = ١٢٠ أو

س = ٤٠

أعنى أن نصيب الثالث $\frac{ج}{٤٠}$ وحينئذ يكون نصيب الثانى $\frac{ج}{٤٠}$ + $\frac{ج}{٣٠}$ = $\frac{ج}{٧٠}$ ونصيب الاول $\frac{ج}{٧٠}$ + $\frac{ج}{١٤}$ = $\frac{ج}{٨٤}$

ثالثا — نشتغل بالحل مع استعمال اشارات وحروف بدل المعاليم فنقول

ليكن المطلوب تقسيم العدد ح على ثلاثة أشخاص بحيث ان الثانى يأخذ زيادة عن الثالث بقدر ى والاول يأخذ زيادة عن الثانى بقدر هـ

فنفرض أن نصيب الثالث س فيكون

نصيب الثالث = س

و « الثانى = س + ى

و « الاول = س + ى + هـ

ويكون مجموع الثلاثة أنصبة يساوى ح أى

س + س + ى + س + ى + هـ = ح أو

٣ س + ٢ ى + هـ = ح فاذا طرح من طرفى هذه المتساوية ٢ ى و هـ يحدث

٣ س = ح — ٢ ى — هـ وبقسمة الطرفين على ٣ ينتج

س = $\frac{ح - ٢ى - هـ}{٣}$

أعنى أنه لايجاد مقدار نصيب الثالث يطرح على التوالى من العدد المراد تقسيمه ضعف زيادة الثانى عن الثالث ثم زيادة الاول

عن الثانى ويقسم الباقى على ٣
أعانصيب كل من الاول والثانى فتسهل معرفته بعد معرفة نصيب الثالث

وبالتأمل فى هذه الحلول الثلاثة يرى أن الحل الاول (الذى لم تستعمل فيه اشارات ولا حروف فيه صعوبة وتطويل — وان الحل الثانى (الذى استعمل فيه اشارات وحرف رمز للمجهول) فيه سهولة واختصار وكلا الحلين غير عام بحيث لو فرضنا مسئلة أخرى مثل المسئلة السابقة ومغايرة لها فى المقادير العددية لالتزمنا أن نعيد كل ماتقدم — ويرى أن الحل الثالث (الذى استعملت فيه اشارات وحروف رموزا للمعاليم والمجاهيل) سهل ومختصر وعام بحيث أن يمكن تطبيق الناتج الاخير على أى مسئلة مشابهة لهذه

(٧) القانون الجبرى — هو وضع مبين للعمليات اللازم اجراؤها لتعين مقدار مجهول فى مسئلة متى كانت الكميات المعلومة مبينة بحروف

وذلك مثل القانون السابق ومثل القانون

$$سـ = ط\ نو^٢$$

الذى فيه س رمز لسطح الدائرة و ط رمز للنسبة التقريبية ونو رمز لنصف القطر

تمارين

(١) اقرأ الكميات $ح^٣ + ٥ ء — هـ ، ح^٤ — ٣ ل — م$

، $\frac{ح}{ى}$ ـ هـ ، س = ح + ى

(٢) بين أن الكميات ح ، ى ، هـ ، و مضافة الى بعضها وكذا ى ، ع ، ٣ م

(٣) بين أن كمية ح يراد طرحها من ى + هـ وكمية هـ + ل يراد طرحها من ع

(٤) بين أن المراد ضرب ح فى ى^{٢} ، س^{٢} فى ص^{٣} ، ٥ فى ٧

(٥) بين أن المراد ضرب مجموع الكميتين ح^{٢} ، ى^{٢} فى الفرق بينهما

(٦) بين أن المراد قسمة ح على ى ، ح + ى على ن ، ح على هـ + و

(٧) بين القوة الخامسة لكمية ح والسابعة لكمية ل والجذر السابع لكمية ن

(٨) أضف ى^{٢} الى خارج قسمة هـ على و واضرب الحاصل فى ح

(٩) ما الفرق بين ٣ ح ، ح^{٣} وبين ٢ ل هـ ، ل^{٢} هـ^{٢}

(١٠) بين انه اذا ضرب ح فى ى وطرح من الناتج هـ وقسم الباقى على ل يكون الخارج مساويا لكمية ص

الاصطلاحات الجبرية

(٨) الكميات السالبة ـ متى كانت الكمية المراد طرحها أكبر من الكمية المراد الطرح منها كانت عملية الطرح غير ممكنة لكن لبيان الناتج قد اتفق فى علم الجبر على طرح الكمية

الصغرى من الكبرى ووضع علامة ـ أمام الناتج
فاذا أريد طرح ٧ من ٥ كانت العملية غير ممكنة وعلى حسب الاتفاق المذكور يطرح ٥ من ٧ ينتج ٢ ويوضع أمامه علامة ـ فيحدث ـ ٢ ويكون ٥ — ٧ = —٢
وكذا اذا أريد طرح ٩ ح٢ من ٥ ح٢ يطرح خمسة أمثال ح٢ من تسعة أمثالها فيبقى أربعة أمثال ح٢ ويكون
٥ ح٢ — ٩ ح٢ = —٤ ح٢
وكل من المقدارين — ٢ و — ٤ ح٢ يسمى كمية سلبية
وينتج من ذلك أن الكمية السلبية هى الكمية المسبوقة بعلامة ـ وهى نتيجة عملية طرح غير ممكنة
أما الكميات المسبوقة بعلامة + فتسمى كميات موجبة وكل كمية غير مسبوقة بعلامة هى أيضا موجبة فتعتبر أنها مسبوقة بعلامة +
(٩) مقادير الكميات السالبة ـ اذا طرح من عدد مثل ٨ على التوالى الاعداد ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و ١١ و ١٢ و .... الخ (مع مراعاة القاعدة السابقة) توجد على التوالى البواقى ٣ و ٢ و ١ و صفر و — ١ و — ٢ و — ٣ و — ٤ و .... الخ
وحيث انه كلما زاد المطروح نقص الباقى فينتج أن — ١ أقل من الصفر وان — ٢ أقل من — ١ و — ٣ أقل من — ٢ وهكذا
أعنى أن مقادير الكميات السالبة أقل من الصفر وان أصغر

الكميتين السالبتين ما كان مقدارها المطلق أكبر

(١٠) المقدار الجبرى — كل وضع جبرى يستدل به على عملية أو عدة عمليات جبرية يسمى مقدارا جبريا

مثل ٣ ح ، ٢ ح + ء ، $هـ^{٣}$ ، هـ $ء^{٢}$ — ل ، $\frac{١}{ب}$ ، $\sqrt{س}$

المقدار الجبرى يكون جذريا اذا لم يشتمل على علامة جذر فان اشتمل على علامة جذر يسمى غير جذرى

فالمقدار ٣ $ح^{٣}$ ء جذرى والمقدار $\sqrt{ح ء}$ غير جذرى

المقدار الجبرى يكون صحيحا اذا لم يشتمل على مقام حرفى فان اشتمل على مقام حرفى يسمى كسريا

فالمقدار $ح^{٢}$ ء يسمى مقدارا صحيحا والمقدار $\frac{ح}{ء}$ يسمى كسريا

(١١) الحد — كل مقدار جبرى لم يتخلله احدى العلامتين + ، — يسمى حدا مثل ح ، ٨ ح ، $\frac{هـ}{و}$ ، — ٣ ح ء

(١٢) درجة الحد الصحيح — هى مجموع أسس حروفه فدرجة الحد ٨ $ح^{٢}$ هى الثانية ودرجة الحد ٩ $ح^{٢}$ $ء^{٣}$ هى الخامسة

تنبيه — هذه هى الدرجة المطلقة وأما درجة الحد بالنسبة لحرف فهى درجة ذلك الحرف فدرجة الحد ٨ $ح^{٢}$ $ء^{٣}$ هـ بالنسبة الى ح هى الثانية وبالنسبة الى ء هى الثالثة وبالنسبة الى هـ هى الاولى

(١٣) كثيرة الحدود — هى كمية مركبة من عدة حدود فاذا تركبت من حدين سميت ذات الحدين واذا تركبت من ثلاثة حدود سميت ذات الثلاثة حدود وهكذا

فالكمية ح٢ + ء ذات حدين والكمية ٣ح٢ — ٢ ء — هـ ذات ثلاثة حدود

والكمية ١٥ ح٢ ء٢ — ٤ ح٢ هـ٣ + ٦ هـ٢ و — ٥ م ذات أربعة حدود

(١٤) درجة كثيرة الحدود — هى أكبر درجات حدودها

فدرجة كثيرة الحدود ٥ ح ء — ٣ ح٢ ء٣ + ٤ ح٣ ء٤ — ٥ ح٤ ء٥ هى التاسعة

تنبيه — هذه هى الدرجة المطلقة وأما درجتها بالنسبة لحرف فهى أعظم درجة فيها لهذا الحرف

فدرجة الكمية السابقة بالنسبة الى ح هى الرابعة

(١٥) كثيرة الحدود المتجانسة — هى ما اتحدت درجة جميع حدودها

وتسمى هذه الدرجة بدرجة التجانس

مثلا كثيرة الحدود ٥ س٤ + ٨ ح س٣ — ١٢ ح٢ س٢ + ٩ ح٣ س — ٦ ح٤ متجانسة بدرجة رابعة

(١٦) الحدود المتشابهة — هى حدود ذات حروف واحدة بأسس متحدة

مثل ٥ ح٢ ء ، ٣ ح٢ ء ومثل ٧ س٣ ، — ٥ س٣ ، ٣ س٣

فهى لا تختلف عن بعضها الا فى المكررات والعلامات

(١٧) اختصار الحدود المتشابهة — لاختصار الحدود المتشابهة تجمع مكررات الحدود الموجبة ثم مكررات الحدود السالبة ويطرح

أصغر المجموعين من الاكبر وتوضع علامة الاكبر امام الباقى ثم يوضع على يساره الجزء الحرفى المشترك

فلاختصار الحدود المتشابهة ٥ ح^{٢} ء + ٧ ح^{٢} ء − ٢ ح^{٢} ء + ٣ ح^{٢} ء − ٦ ح^{٢} ء − ٣ ح^{٢} ء نجمع مكرارت الحدود الموجبة وهى ٥ و ٧ و ٣ ينتج ١٥ ثم نجمع مكرارت الحدود السالبة وهى ٢ و ٦ و ٣ ينتج ١١ ثم بطرح الاصغر ١١ من الاكبر ١٥ يبقى ٤ وحيث ان علامة المجموع الاكبر موجبة فنعتبر علامة ٤ زائد ثم نضع بجواره الجزء الحرفى المشترك ح^{٢} ء فينتج ٤ ح^{٢} ء

(١٨) المقدار الرقمى لمقدار جبرى — هو ما ينتج من استعاضة الحروف بمقاديرها العددية واجراء العمليات المبينة عليها

فالمقدار الرقمى للحد ٩ ح^{٢} ء^{٣} بفرض أن ح = ٥ و ء = ٢ هو

$$٩ \times ٥^{٢} \times ٢^{٣} = ٩ \times ٢٥ \times ٨ = ١٨٠٠$$

والمقدار الرقمى لكثيرة الحدود ح^{٣} − ٣ ح^{٢} ء + ٢ ح ء^{٢} − ء^{٣} بفرض ح = ٧ و ء = ٥ هو

$$٧^{٣} - ٣ \times ٧^{٢} \times ٥ + ٣ \times ٧ \times ٥^{٢} - ٥^{٣}$$ أو

$$٣٤٣ - ٧٣٥ + ٥٢٥ - ١٢٥$$ أو

$$٨٦٨ - ٨٦٠ = ٨$$

تنبيه — اذا أريد ايجاد المقدار الرقمى لكمية كثيرة الحدود متشابهة فتختصر أولا ثم يبحث عن المقدار الرقمى للناتج

(١٩) كثيرات الحدود المرتبة — يقال ان كثيرة الحدود مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف متى كانت أسس

هذا الحرف آخذة فى التصاعد أو فى التنازل فى حدود هذه الكمية من الحد الاول الى الحد الأخير

فكثيرة الحدود $س - ٤ س^{٢} + ٥ س^{٣} - ٣ س^{٤} + ٦ س^{٥}$ مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف س أى ان أسس هذا الحرف آخذة فى التصاعد بالتوالى من الحد الاول الى الاخير

وكثيرة الحدود $٤ ا ص^{٤} - ٥ ا^{٢} ص^{٣} + ٢ ا^{٣} ص^{٢} - ص$ مرتبة بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ص أى ان أسس هذا الحرف آخذة فى التنازل بالتوالى من الحد الاول الى الاخير

(٢٠) ترتيب كثيرات الحدود ـ لترتيب كثيرة الحدود بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف معين يبدأ بكتابة الحد المشتمل على أعظم درجة لحرف الترتيب ثم ما يليه فى الصغر وهكذا

ولترتيبها بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف يبدأ بكتابة الحد المشتمل على أقل درجة لحرف الترتيب ثم مايليه فى الكبر وهكذا

وابتنبه الى أن الحد الذى لم يشتمل على حرف الترتيب يقدم على الذى أسس حرف الترتيب فيه واحد فى الترتيب التصاعدى ويؤخر عنه فى التنازلى

فلترتيب كثيرة الحدود $٤ ح^{٢} ء^{٣} + ٢ ح ء^{٤} + ٥ ء^{٥} - ح^{٥} - ٣ ح^{٣} ء^{٢} + ٢ ح^{٤} ء$ بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ء تكتب هكذا $٥ ء^{٥} + ٢ ح ء^{٤} + ٤ ح^{٢} ء^{٣} - ٣ ح^{٣} ء^{٢} + ٢ ح^{٤} ء - ح^{٥}$ ويرى أنها مرتبة أيضا بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف ح

تمارين

(١١) اطرح ١٣ من ٥ ، ١٧ من ٩ ، ٤ ح من ٣ ح ، ٤٢ س^{٢} ص من ١٥ س^{٢} ص

(١٢) رتب المقادير − ٢ ، − ١٠ ، ٣٠٠ ، − ١ ، − ٠٫٧٥ ، ١٫٢٥ مبتدأً بأكبرها

(١٣) بين درجات الحدود ٥ ح^{٢} ى س ، ٦ ح^{٣} س^{٢} ، س^{٣} ح ه^{٢} ثم بين درجات كل منها بالنسبة الى ح وبالنسبة الى س

(١٤) بين درجة كثيرة الحدود الآتية

٧ م ه^{٣} − ٣ م^{٢} ه^{٥} + ٩ م^{٣} ه^{٢} − ٤ م^{٤} ثم بين درجتها بالنسبة لحرف م

(١٥) اختصر الحدود المتشابهة الآتية

ح + ٣ ح + ٥ ح + ١٠ ح ،

− ٢ ى − ٥ ى − ٤ ى − ١١ ى ،

٣ ح^{٢} − ٤ ح^{٢} + ١٠ ح^{٢} − ٦ ح^{٢} − ٧ ح^{٢} ،

٤ ح ى ه − ٤ س ص + ٥ ح ى ه − ٢ س ص − ٤ س ص + ٢ ح ى ه ،

٤ ح^{٢} ى^{٣} — ٤ ح^{٣} ى^{٢} − ٣ ح^{٢} ى^{٣} + ٣ ح^{٣} ى^{٢} + ٧ ح^{٢} ى^{٣} − ٦ ح^{٣} ى^{٢}

(١٦) ابحث عن المقادير الرقمية لكل من الحدود الآتية

٧ ح^{٢} س ، ٩ ح س^{٥} ، ٤ ح^{٣} س^{٢} ، ٤ ح ، س^{٤}

بفرض ح = ٥ ، س = ٣

(١٧) ابحث عن المقادير العددية للكميات الآتية

$س^{٢} + ٢ س^{٣} ص - ٣ س^{٤} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣}$ ،

$٤ ح^{٤} - \frac{٣}{٥} ح^{٣} ء - \frac{٧}{٨} ح^{٢} ء^{٢} + ٣,٠ ح ء^{٣} + ء^{٤}$

بفرض أن $س = ٢$ ، $ص = ٣$ ، $ح = ٤$ ، $ء = ٧$

(١٨) ابحث عن المقادير العددية للكميات الآتية

$٧ س + ٤ ح س^{٢} - ٣ س - \frac{٣}{٢} ح س^{٢}$ ،

$٣,٠ ص^{٢} - ٤,٠ ص^{٢} + \frac{٥}{٨} ص - ١$ ،

$٢ ص^{٣} ء - ٣ ص^{٣} ء + ص^{٣} ء - ٣$

بفرض انه $س = ٥$ ، $ح = ٢$ ، $ء = ١$ ، $ص = ٤$

(١٩) رتب كلا من الكميات الآتية بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف مشترك فيها

$٣ س^{٢} ص^{٣} - ٥ س ص^{٤} + ٣ س^{٣} ص^{٢} - ٢ ص^{٥} - ٧ س^{٥} + س^{٤} ص$ ،

$٧ ح^{٣} - ٣ ح^{٥} - ٢ ح + ٧ ح^{٤} - ح + ٢ ح^{٢}$ ،

$١٧ ء هـ^{٥} - ١٥ ء^{٤} و - ٣ ء^{٣} ن^{٢} - ٢ ء ع^{٧} + ء - ع$

(٢٠) رتب كل واحدة من الكميات الآتية بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف مشترك فيها

$٢ ء هـ^{٤} - ٣ ء^{٢} هـ^{٣} - ٤ ء^{٣} هـ^{٢} + ٦ هـ^{٥} - ٨ ء^{٥} + ٥ ء هـ$ ،

$٣ ح^{٢} و - ٢ ح^{٣} هـ - ٥ ح ع^{٤} + ٦ ح ن - ٧ ح^{٥}$

+ ٨ ل ،

٨ ح^{٣} ء — ٧ ح ء^{٣} + ٥ ح^{٢} ء^{٢}

العمليات الجبرية

(٢١) تمهيد — لما كانت الحروف فى علم الجبر تدل على الاعداد بوجه العموم أى لا يتقيد كل حرف بعدد خاص فلا يحصل من اجراء العمليات عليها ناتج مبين بحرف أو حروف مغايرة للحروف المعلومة وانما يقتصر فى العمليات الجبرية على بيانها

وعلى هذا فان جمع الكميتين ب ، ح لا ينتظر منه الحصول على حرف آخر يدل على مجموعهما كما فى جمع العددين ٥ ، ٣ الذى يحصل منه ٨ وقس على ذلك طرح أو ضرب أو قسمة هاتين الكميتين

فالغرض اذن من العمليات الجبرية هو تحويل الاوضاع المفروضة الى وضع آخر مكافئ لها ويكون أخصر من تلك الاوضاع على قدر الامكان

(٢٢) وللجبر أربع عمليات أصلية كعمليات علم الحساب

الجمع

(٢٣) تعريف — الغرض من الجمع الجبرى تحويل جملة أوضاع جبرية الى وضع يكون مقداره العددى مساويا لمجموع المقادير العددية للاوضاع المفروضة .

(٢٤) قاعدة لجمع جملة كميات جبرية يكتب بعضها بجانب بعض بدون تغيير اشاراتها ثم تختصر الحدود المتشابهة من الحاصل أن وجدت

فمجموع الكميات ا , ب , ـ ح , د هو ا + ب ـ ح + د

ومجموع الكميات ٣ ح و ٢ د و ـ ٤ ح و ـ د هو ٣ ح + ٢ د ـ ٤ ح ـ د = د ـ ح

ومجموع الكميات ا ـ ب + ح و ح + د + هـ و ـ ٢ د ـ هـ هو

ا ـ ب + ح + ح + د + هـ ـ ٢ د ـ هـ = ا ـ ب + ٢ ح ـ د

لان كلا من هذه النواتج يشتمل على جميع الكميات المراد جمعها فمقداره العددى يكون مساويا لمجموع المقادير العددية لهذه الكميات

(٢٥) تنبيه (١) ـ اذا وجد بين الكميات المراد جمعها حدود متشابهة تكتب تحت بعضها ثم تجرى عملية الجمع مع ملاحظة اختصار الحدود المتشابهة من أول الامر

مثال ذلك

٨ ح^{٣} د^{٢} ـ ٥ ح^{٢} د^{٣} ـ ٣ ح د^{٤} + ٧ ح^{٥}

٦ ح^{٣} د^{٢} ـ ٢ ح^{٢} د^{٣} + ٤ ح د^{٤}

ـ ٥ ح^{٣} د^{٢} + ٤ ح^{٢} د^{٣} ـ ٧ ح د^{٤} ـ ٧ ح^{٥}

---

٩ ح^{٣} د^{٢} ـ ٣ ح^{٢} د^{٣} ـ ٦ ح د^{٤}

(٣٦) تنبيه (٢) ـ اذا وضعت كمية بين قوسين تسبقها علامة + دل ذلك على لزوم اضافة مابين القوسين الى ماقبل علامة + فاذا أريد اجراء العمل حذف القوسان مع علامة + التى تسبقهما وكتبت الكمية بعلاماتها

مثلا

د + (حـ − ب + هـ) = د + حـ − ب + هـ ،

د + (− حـ − ب + هـ) = د − حـ − ب + هـ

تمارين

(٢١) اجمع ا ، ب ، − حـ ثم د ، − هـ ، ل ، ع^{٢}

(٢٢) اجمع ٣ ا ، حـ ، − ٢ ا ، د ، − حـ ثم − حـ ، د ، هـ ، − حـ ، − ٣ د ، ب

(٢٣) اجمع ا + ب − حـ ، د + هـ + و ، م − ن + ع − ل ثم اجمع س + ص + ل ، د − ع − و ، م + ل

(٢٤) اجمع ٣ ا + ٣ ب − ٤ حـ ، ٣ ا − ب + هـ ثم اجمع حـ د^{٢} + حـ^{٢} د^{٣} − حـ^{٣} د^{٤} ، − ٣ حـ د^{٢} − ٢ حـ^{٢} د^{٣} + حـ^{٤} د^{٥} ، ٢ حـ^{٣} د^{٤} − حـ^{٤} د^{٥}

(٢٥) اجمع ٣ ا^{٢} ب − ٢ ا ب^{٢} ، ٨ ا^{٢} ب + ٢ ا ب^{٢} ثم اجمع ٣ ا^{٣} ب^{٢} − ٥ ا^{٤} ب + ٢ ا^{٥} ، ٣ ا^{٣} ب^{٢} + ٤ ا^{٥} + ٣ ا^{٤} ب

(٢٦) اجمع $٥أ^{٤}ب^{٦} - ٣أ^{٢}ب^{٥} - ٧أ^{٢}ب^{٤} + ٣ب ح$ ، $-$
$٣أ^{٤}ب^{٦} + ٥أ^{٣}ب^{٥} - ٢أ^{٢}ب^{٤} - \frac{٣}{٤}أ^{٢}ب^{٤} - ٢ب ح$ ، $٧أ^{٤}$
$ب^{٦} - ٢أ^{٣}ب^{٥} + ٥أ^{٢}ب^{٤} + ٦ب ح$

(٢٧) اجمع كثيرات الحدود الآتية

$٢أ^{٥}ب^{٤} - ٣أ^{٤}ب^{٣} + \frac{١}{٥}أ^{٣}ب^{٢} + ١٥أب^{٢} - ٣أ$ ،
$-٥أ^{٥}ب^{٤} + ٢أ^{٤}ب^{٣} - ٣أ^{٣}ب^{٢} - ٨أب^{٢} + ٧أ$ ،
$٩أ^{٥}ب^{٤} + أ^{٤}ب^{٣} - ٥أ^{٣}ب^{٢} + ٤أب^{٢} - \frac{٣}{٤}أ$

(٢٨) ما مجموع الكميات $٧أ^{٣}ب^{٥} - ٤أ^{٢}ب^{٤} - ٢أ^{٤}ب^{٥} -$
$٣ح$ ، $٨أ^{٢} + ب ح - ٣ + ٤ح - ٥أ^{٣}ب^{٥}$ ، $٤أ^{٣}ب^{٤}$
$+ ٢أ^{٤}ب^{٥} + ٢ح - ٥أ^{٢} + ٣ب ح$ ، $٧ - أ^{٣}ب^{٤} - ٤$
$أ^{٣}ب^{٥} - \frac{٣}{٤}أ^{٣} - ٨$

(٢٩) تاجر عنده ٢٠٠٠٠ فرنك فى خزينته وله بضائع قيمتها ب فرنك وله مبلغ ح فرنك فما مقدار ما يمتلكه

(٣٠) ما مجموع ثلاثة أعداد صحيحة متتالية أصغرها ح وما مجموع عددين متواليين أكبرهما ء

الطرح

(٣٧) تعريف ـ الغرض من طرح كميتين جبريتين من بعضهما البحث عن كمية ثالثة لو أضيف مقدارها العددى الى المقدار

العددى لكمية المطروح يكون الناتج مساويا للقدار العددى لكمية المطروح منه

(٢٨) قاعدة ـ اطرح كمية جبرية من أخرى تكتب كمية المطروح منه وبعدها كمية المطروح مع تغيير علامة كل حد من حدود كمية المطروح وتختصر الحدود المتشابهة ان وجدت فباقى طرح حـ من د هو د ــ حـ وباقى طرح ــ حـ من د هو د + حـ

وباقى طرح حـ + د ــ هـ من ا + ل ــ ق هو ا + ل ــ ق ــ حـ ــ د + هـ

وباقى طرح حـ ــ د + هـ من حـ ــ د ــ هـ هو حـ ــ د ــ هـ ــ حـ + د ــ هـ = ــ ٢ هـ

وذلك لانه اذا أضيف الباقى الى كمية المطروح ينتج كمية المطروح منه

(٢٩) تنبيه ١ اذا وجد بين كميتى المطروح والمطروح منه حدود متشابهة تغير اشارات جميع حدود كمية المطروح ثم توضع الحدود المتشابهة تحت بعضها وتختصر من أول الامر

مثلا اذا أريد أن يطرح من الكمية ٤ اب^{٢} ــ ٩ أ^{٢}ب^{٢} + ٨ أ^{٣}ب^{٥} الكمية ٢ اب^{٢} ــ ٣ أ^{٢}ب^{٢} + ٤ أ^{٣}ب^{٥} نجرى العمل هكذا

٤ اب^{٢} ــ ٩ أ^{٢}ب^{٢} + ٨ أ^{٣}ب^{٥}
ــ ٢ اب^{٢} + ٣ أ^{٢}ب^{٢} ــ ٤ أ^{٣}ب^{٥}
____
٢ اب^{٢} ــ ٦ أ^{٢}ب^{٢} + ٤ أ^{٣}ب^{٥}

ومع التمرين تيسر للطالب وضع الحدود المتشابهة تحت بعضها بدون تغيير الاشارات وملاحظة التغير عقلا

(٣٠) تنبيه (٢) اذا وضعت كمية بين قوسين تسبقهما علامة − دل ذلك على لزوم طرح ما بين القوسين مما قبل علامة − فاذا أريد اجراء العمل حذف القوسان وعلامة − المذكورة وكتبت هذه الكمية بجانب ماقبلها مع تغيير اشارات جميع حدودها

مثلا د − (هـ + و − ب) = د − هـ − و + ب

تمارين

(٣١) بين باقى طرح حـ من د ، هـ من − و ، − أ من ب ، − ب من − حـ

(٣٢) بين باقى طرح ٢ حـ + د من ٤ هـ − و ، ٣ أ^{٢} ب^{٢} − ٢ أ^{٢} ب من ٥ حـ^{٢} د^{٢} − ل

(٣٣) بين باقى طرح − ٢ أ + ب من ٢ أ + ٣ ب ، ٣ أ − ٤ ب + حـ من ٢ أ − ٢ ب

(٣٤) من الكمية ٤ أ^{٢} ب^{٣} − ٥ أ ب^{٢} − ٣ ب اطرح ٣ أ^{٢} ب^{٣} − أ ب^{٢} + ٢ ب ثم بين المقدار الرقمى للناتج بفرض أن أ = ٤ ، ب = ٢

(٣٥) من الكمية ٤ أ س^{٢} − ٣ أ^{٢} س + ٥ أ^{٣} س^{٤} − ب س^{٥} + ب^{٢} اطرح − ٢ أ س^{٢} + ٣ أ^{٢} س + ٤ أ^{٣} س^{٤} وابحث

عن المقـدار الرقمى للناتج بفرض أن ا = ١ ، ب = ٢ وس = ٣

(٣٦) من كثيرة الحدود ٤ حـ^{٣} ء^{٣} − ٧ حـ^{٢} ء^{٤} − ٦ حـ ء^{٥} + ٣ ء^{٦}

اطرح ٢ حـ^{٣} ء^{٣} + ٤ حـ^{٢} ء^{٤} − ٥ حـ ء^{٥} − ٥ ء^{٦}

(٣٧) من الكمية ٨ س^{٣} − ٣ ا س^{٢} + ٤ ا^{٢} س^{٢} − ٥ ا^{٣} ب

اطرح مجموع الكميتين ٥ ا^{٣} + ٢ ا س^{٢} + ٤ ا^{٢} س − ٣ ا^{٣} ب ، ٣ س^{٣} − ٤ ا س^{٢} − ٥ ا^{٢} س + ٢ ا^{٣} ب

(٣٨) احذف الاقواس من الكميات الآتية

٥ أ^{٣} ب^{٢} − ٣ أ^{٤} ب + ٢ أ^{٥} − (أ^{٣} ب^{٢} − ٤ أ^{٤} ب + ٣ أ^{٥}) ،

٨ أ^{٤} ب^{٥} − ٥ أ^{٣} ب^{٤} − ٢ أ^{٢} ب^{٣} − (− ٢ أ^{٤} ب^{٥} + ٣ أ^{٣} ب^{٤} − ٢ أ^{٢} ب^{٢}) ،

٣ أ^{٤} ب^{٢} − ٥ أ^{٣} ب^{٢} + ٤ أ^{٢} ب^{٤} − (٣ أ^{٣} ب^{٢} − ٢ أ^{٢} ب^{٤} − ٤ أ^{٤} ب^{٢}) ،

٣ أ + ب − ٢ $\sqrt{\text{أ ب}}$ − (٢ أ − ب − ٢ $\sqrt{\text{أ ب}}$)

(٣٩) أضـلاع مثلث ا و ب و حـ ومحيط المثلث ٢ ع والمطـلوب بيان الاوضاع الجبرية التي يحسب بها كل واحد من أضلاع هذا المثلث بفرض أن الضلعـين الآخرين معلومان وكذا محيط المثلث

(٤٠) حوض مسلط عليه حنفيتان الاولى تصب ا استر فى ٥ دقائق والثانيه تصب ب استر فى ٤ دقائق وفى أسفل الحوض بالوعة تفرغ ح لتر فى ٨ دقائق والمطلوب بيان الوضع الجبرى الذى يحسب به ما يوجد فى الحوض بعد ساعة اذا فتحت الحنفيتان والبالوعة

الضرب

(٣١) تعريف ــ الغرض من ضرب كميتين جبريتين فى بعضهما ايجاد كمية ثالثة يكون مقدارها العددى يساوى حاصل ضرب المقدارين العدديين للكميتين المفروضتين

(٣٢) يشتمل الضرب الجبرى على ثلاث حالات الاولى ضرب حد فى حد الثانية ضرب كمية كثيرة الحدود فى حد الثالثة ضرب كمية كثيرة الحدود فى مثلها

ضرب حد فى حد

(٣٣) قاعدة ــ لضرب حد فى حد يضرب مكرر المضروب فى مكرر المضروب فيه ثم يوضع على يمينه كل حرف مشترك بأس يساوى مجموع أسيه فى المضروبين ثم الحروف غير المشتركة توضع كما هى ويقرن الحاصل بعلامة (+) زائد اذا اتحدت علامتا المضروبين وبعلامة (ـــ) ناقص اذا اختلفت العلامتان

فعلى هذا يكون ٣ $ح^{٢}$ $د^{٣}$ هـ فى ٧ ح $د^{٢}$ و = ٢١ $ح^{٣}$ $د^{٥}$ هـ و ؛

٨ $ح^{٣}$ د × − ٥ ح $د^{٣}$ = − ٤٠ $ح^{٤}$ $د^{٤}$ ؛

− ٩ ح هـ و × − ٣ ح هـ = ٢٧ $ح^{٢}$ $هـ^{٢}$ و

− ح د هـ × $هـ^{٢}$ $د^{٣}$ = − ح $د^{٤}$ $هـ^{٣}$

(٣٤) تنبيـه ـ بملاحظة تعريف القوة المذكور بنمـرة (٤) وما تقتضيه علامـة حاصـل الضرب المبينة بنمرة ٣٣ السابقـة يستنتج ما يأتى

الحد الموجب بجميع قواه تكون موجبـة ـ وأما الحد السالب فقواه الزوجية موجبة والفردية سالبة

أعنى أن (+ $ح)^{٤}$ = $ح^{٤}$ ؛ (+ $ح)^{٥}$ = $ح^{٥}$.

؛ (− $ح)^{٤}$ = $ح^{٤}$ ؛ (− $ح)^{٥}$ = − $ح^{٥}$

ضرب كثيرة الحدود فى حد

(٣٥) قاعدة لضرب كمية كثيرة الحدود فى حد بضرب كل حد من حدودها فى ذلك الحد

مثلا ($د^{٢}$ + $هـ^{٣}$ + ح − د هـ) ح = ح $د^{٢}$ + ح $هـ^{٣}$ + $ح^{٢}$ − ح د هـ ؛

(١ + د − ٢ $د^{٢}$ هـ + ٥ $د^{٣}$ $هـ^{٢}$) ٣ هـ = ٣ هـ + ٣ هـ د − ٦ $د^{٢}$ $هـ^{٢}$ + ١٥ $د^{٣}$ $هـ^{٣}$

وبمثل ذلك يجرى العمل فى ضرب حد فى كمية كثيرة الحدود .

ضرب كمية كثيرة الحدود فى مثلها

(٣٦) قاعدة ـ لضرب كمية كثيرة الحدود فى مثلها تضرب كمية المضروب فى كل حد من كمية المضروب فيه ثم تختصر الحدود المتشابهة فى الحاصل ان وجدت

مثلا $(ح + ء - هـ)(ح - ء) = (ح + ء - هـ) \times ح + (ح + ء - هـ) \times - ء = ح^{٢} + ح ء - ح هـ - ح ء - ء^{٢} + ء هـ = ح^{٢} - ح هـ - ء^{٢} + ء هـ$

(٣٧) ضرب كثيرات الحدود المرتبة ـ لسهولة العمل فى الضرب يرتب كل من المضروب والمضروب فيه بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف مشترك فيهما ثم يجرى العمل كما فى القاعدة السابقة و يلاحظ وضع الحدود المتشابهة تحت بعضها واختصارها من أول الامر فاذا أريد ضرب $٣ ح ء^{٢} - ٢ ح^{٢} ء + ح^{٣} - ٥ ء^{٣}$ فى $٢ ح ء + ٣ ح^{٢} - ء^{٢}$

ترتب هاتان الكميتان بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ح كما فى (٢٠) ثم نجرى العمل بمقتضى قاعدة (٣٦) هكذا

$$
\begin{array}{l}
ح^{٣} - ٢ ح^{٢} ء + ٣ ح ء^{٢} - ٥ ء^{٣} \\
٣ ح^{٢} + ٢ ح ء - ء^{٢} \\
\hline
٣ ح^{٥} - ٦ ح^{٤} ء + ٩ ح^{٣} ء^{٢} - ١٥ ح^{٢} ء^{٣} \\
\quad + ٢ ح^{٤} ء - ٤ ح^{٣} ء^{٢} + ٦ ح^{٢} ء^{٣} - ١٠ ح ء^{٤} \\
\quad\quad - ح^{٣} ء^{٢} + ٢ ح^{٢} ء^{٣} - ٣ ح ء^{٤} + ٥ ء^{٥} \\
\hline
٣ ح^{٥} - ٤ ح^{٤} ء + ٤ ح^{٣} ء^{٢} - ٧ ح^{٢} ء^{٣} - ١٣ ح ء^{٤} + ٥ ء^{٥}
\end{array}
$$

(٣٨) تنبيه – متى رتب المضروبان بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف مشترك فيهما يشاهد أن الحد الاول من حاصل الضرب يشتمل على حرف الترتيب بأس أكبر من جميع أسسه فى الحدود الاخر ويشاهد أن الحد الاخير يشتمل على حرف الترتيب بأس أصغر من جميع أسسه فى الحدود الاخر

ومتى رتب المضروبان بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف مشترك فيهما يشاهد أن الحد الاول من حاصل الضرب يشتمل على حرف الترتيب بأس أصغر من جميع أسسه فى الحدود الاخر والحد الاخير يشتمل على حرف الترتيب بأس أكبر من جميع أسسه فى الحدود الاخر

وينتج من ذلك أن الحد الاول والاخير لا يمكن أن يكونا مشابهين لاى حد من الحدود الاخر فاذن لا يمكن اختصارهما

(٣٩) النهاية الصغرى والكبرى لعدد حدود حاصل ضرب كميتين كثيرتى الحدود – أقل مايشتمل عليه حاصل ضرب كميتين كثيرتى الحدود حدان فقط (وهما الاول والاخير)

وقد لايتأتى اختصار بين حدود حاصل ضرب كميتين كثيرتى الحدود ومن ذلك يقال أكثر ما يشتمل عليه حاصل ضرب كميتين كثيرتى الحدود هو حدود بقدر حاصل ضرب عدد حدود المضروب فى عدد حدود المضروب فيه

ولنبين ذلك بمثالين ـ الاول نجرى عملية الضرب الآتية

$$ح^{4} + ح^{3}ء + ح^{2}ء^{2} + ح ء^{3} + ء^{4}$$
$$ح - ء$$
$$\overline{ح^{5} + ح^{4}ء + ح^{3}ء^{2} + ح^{2}ء^{3} + ح ء^{4}}$$
$$- ح^{4}ء - ح^{3}ء^{2} - ح^{2}ء^{3} - ح ء^{4} - ء^{5}$$
$$\overline{ح^{5} \qquad\qquad - ء^{5}}$$

فيرى أن حاصل الضرب قد اشتمل على حدين فقط وهما الاول والآخير وأما بقية الحدود فتماحت مع بعضها

المثال الثانى ـ نجرى عملية الضرب الآتية

$$ح^{2} + ح ء + ء^{2}$$
$$ح^{2} - ء$$
$$\overline{ح^{4} + ح^{3}ء + ح^{2}ء^{2}}$$
$$- ح^{2}ء - ح ء^{2} - ء^{3}$$
$$\overline{ح^{4} + ح^{3}ء + ح^{2}ء^{2} - ح^{2}ء - ح ء^{2} - ء^{3}}$$

فيرى أن حاصل الضرب قد اشتمل على حدود بقدر حاصل ضرب عدد حدود المضروب فى عدد حدود المضروب فيه (وذلك لعدم وجود حدود متشابهة تختصر مع بعضها)

قوانين عمومية فى الضرب

(٤٠) الاول ـ اذا أجريت عملية ضرب $(ح+ء)$ $(ح+ء)$

أى $(ح + ء)^٢$ يحصل $(ح + ء)^٢ = ح^٢ + ٢ ح ء + ء^٢$

أعنى أن مربع مجموع حدين يساوى مربع الاول زائدا ضعف الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى

(٤١) الثانى ـ اذا أجريت عملية ضرب $(ح - ء)$ $(ح - ء)$ أى $(ح - ء)^٢$ يحصل $(ح - ء)^٢ = ح^٢ - ٢ ح ء + ء^٢$

أعنى أن مربع فرق حدين يساوى مربع الاول ناقصا ضعف الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى

(٤٢) تنبيه ـ يمكن اعتبار هذين القانونين قانونا واحدا بملاحظه أن الحد $(- ء)$ مضافا اضافة جبرية الى ح وحينئذ يقال على وجه العموم

مربع كمية ذات حدين يساوى مربع الحد الاول مضافا اليه ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى

(٤٣) الثالث ـ اذا أجريت عملية ضرب $(ح + ء)$ فى $(ح - ء)$ ينتج

$$(ح + ء)(ح - ء) = ح^٢ - ء^٢$$

أعنى أن حاصل ضرب مجموع كميتين فى تفاضلهما يساوى الفرق بين مربعيهما

(٤٤) الرابع ـ اذا أجريت عملية ضرب $(ح + ء)$ $(ح + ء)$ $(ح + ء)$ أى $(ح + ء)^٣$ ينتج

$$(ح + ء)^٣ = ح^٣ + ٣ ح^٢ ء + ٣ ح ء^٢ + ء^٣$$

أعنى أن مكعب مجموع حدين يساوى مكعب الاول زائدا ثلاثة

أمثال مربع الاول فى الثانى زائدا ثلاثة أمثال الاول فى مربع الثانى زائدا مكعب الثانى

(٤٥) الخامس — اذا أجريت عملية ضرب

(ح — د) (ح — د) (ح — د) أى (ح — د)^{٣} ينتج

(ح — د)^{٣} = ح^{٣} — ٣ ح^{٢} د + ٣ ح د^{٢} — د^{٣}

أعنى أن مكعب فرق حدين يساوى مكعب الاول ناقصا ثلاثة أمثال مربع الاول فى الثانى زائدا ثلاثة أمثال الاول فى مربع الثانى ناقصا مكعب الثانى

تنبيه يمكن اعتبار هذين القانونين الرابع والخامس قانونا واحدا باعتبار ان الحد (— د) مضافا اضافة جبرية أى ح

(٤٦) السادس — اذا أجريت عملية ضرب (ا — ب) (ا^{٢} + ا ب + ب^{٢}) ينتج ا^{٣} — ب^{٣} ومن هنا ينتج أن الفرق بين مكعبى كميتين يساوى حاصل ضرب الفرق بينهما فى مجموع مربع الاولى وحاصل ضرب الكمية الاولى فى الثانية ومربع الثانية

(٤٧) السابع — اذا أجريت عملية ضرب (ا + ب) فى (ا^{٢} — ا ب + ب) ينتج ا^{٣} + ب^{٣} ومن هنا ينتج أن مجموع مكعبى كميتين يساوى حاصل ضرب مجموع هاتين الكميتين فى المقدار الناتج من مربع الاولى مطروحا منه حاصل ضرب الاولى فى الثانية مضافا للباقى مربع الثانية

(٤٨) الثامن — اذا أجريت عملية ضرب (س + ا) فى (س + ب) ينتج

$س^2 + س ب + س ا + ا ب$ أو $س^2 + (ا + ب)$
$س + ا ب$

أعنى أن حاصل ضرب كمية ذات حدين فى مثلها متحدتين فى الحد الاول يساوى مربع الحد الاول زائدا حاصل ضرب مجموع الحدين الثانيين فى الاول زائدا حاصل ضرب الحدين الثانيين فى بعضهما

تنبيه ـ هذا القانون حقيق مهما كان مقدارا ا , ب أى سواء كانا موجبين أو سالبين أو أحدهما موجب والآخر سالب وسواء كانا فى كل حالة مختلفين أومتساويين وحينئذ فيمكن وضع القوانين الآتية

$$(س + ا)(س + ب) = س^2 + (ا + ب) س + ا ب \quad (١)$$
$$(س + ا)(س + ا) = س^2 + ٢ ا س + ا^2 \quad (٢)$$
$$(س - ا)(س - ب) = س^2 - (ا + ب) س + ا ب \quad (٣)$$
$$(س - ا)(س - ا) = س^2 - ٢ ا س + ا^2 \quad (٤)$$
$$(س + ا)(س - ب) = س^2 + (ا - ب) س - ا ب \quad (٥)$$
$$(س + ا)(س - ا) = س^2 - ا^2 \quad (٦)$$

وبالتأمل يرى أن قانون (٢) هو عين الناتج بنمرة ٤٠ وقانون ٤ هو عين الناتج بنمرة ٤١ وقانون (٦) هو عين الناتج بنمرة ٤٣ أعنى أن القوانين السابقة المذكورة ليست الا أحوالا خصوصية من القانون الثامن نمرة ٤٨

(٤٩) مربع كمية كثيرة الحدود ـ تقدم أن مربع كمية ذات حدين مثل

$(ح + د)^{٢} = ح^{٢} + ٢ ح د + د^{٢}$

فاذا أريد ايجاد مربع كمية ذات ثلاثة حدود مثل

$(ح + د + ه)^{٢}$ رمز لمجموع الحدين $ح + د$ بحرف $ب$

فيحدث $(ح + د + ه)^{٢} = (ب + ه)^{٢}$ وهذا يساوى

$ب^{٢} + ٢ ب ه + ه^{٢}$

فاذا وضع بدل $ب$ مقداره يحدث

$(ح + د + ه)^{٢} = (ح + د)^{٢} + ٢ ه (ح + د) + ه^{٢}$ أو

$(ح + د + ه)^{٢} = ح^{٢} + ٢ ح د + د^{٢} + ٢ ه ح + ٢ ه د + ه^{٢}$

أعنى أن مربع كمية ذات ثلاثة حدود يساوى مجموع مربعات حدودها زائدا ضعف حاصل ضرب حدودها فى بعضها مثنى

وهذه القاعدة عامة مهما كان عدد الحدود

وبيان ذلك يقال اذا فرض أنها متحققة فى حدود عددها م مثل $(ح + د + \dots + ل)$ تتحقق فى حدود تزيد عنها بواحد مثل $(ح + د + \dots + ل + ع)$

لاننا ان رمزنا بحرف $ب$ لمجموع الحدود الاول تؤل الكمية الى $(ب + ع)^{٢}$ ومعلوم أن $(ب + ع)^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب ع + ع^{٢}$. أما الجزء الاول $ب^{٢}$ فهو مربع الكمية ذات الحدود

التي عددها م ويشتمل على مربعات هذه الحدود وأضعاف حاصل ضربها في بعضها مثنى وأما الجزء الثاني ٢ ب ع فهو يشتمل على أضعاف الحدود التي عددها م في الحد الجديد وأما الجزء الثالث ع^{٢} فهو مربع الحد الجديد

فتبين من ذلك أنه بفرض تحقق هذه القاعدة في حدود عددها م تتحقق في حدود عددها م + ١ وحيث انها متحققة في ثلاثة حدود فتتحقق في أربعة وحينئذ متى علم أنها متحققة في أربعة تتحقق في حدود عددها خمسة وحينئذ تكون عامة

تمارين

المطلوب ايجاد حاصل ضرب كل من المقادير الآتية

(٤١) ٣ ح^{٢} ء × ٢ ح ء^{٢} ، ٤ ه و^{٢} × ٥ ه ب^{٢} ، $\frac{١}{٣}$ م ك^{٢} ه × $\frac{٣}{٥}$ م^{٢} ك و ، − ٣ ح ه × − ٣ ح و

(٤٢) (ح + ء + ه − و) ح ، (ح − ء + ه^{٢} − و^{٣}) ح ، − ل (− ح^{٣} − ء^{٢} − ه^{٢})

(٤٣) (ح + ء − ه) (أ + ب − ح) ، (ء^{٢} + ه^{٢} − و^{٣}) (س − ب)

(٤٤) ٥ ح^{٢} ء^{٣} − ٤ ح^{٣} ء^{٢} + ٣ ح^{٥} − ٣ ح^{٤} ء + ٧ ح ء^{٤} − ٨ ء^{٥} في ٥ ح^{٣} − ٧ ح^{٢} ء − ٤ ء^{٣}

(٤٥) ٤ ب^{٣} ح^{٢} − ٧ ح^{٥} + ٦ ب ح^{٤} − ٣ ب^{٤} ح − ٥ ب^{٢} ح^{٣}

+ ٢ ب^{٥} فى ٤ ب ح^{٢} − ٣ ب^{٢} ح + ٢ ب^{٣} −
٥ ح^{٣}

(٤٦) ٥ س^{٥} − ٣ ب س^{٢} − ٢ ب^{٣} س^{٢} − ٤ ب^{٥} فى س^{٢}
− ب س + ب^{٢}

(٤٧) ٨١ ح^{٨} ء^{٤} + ٩ ح^{٤} ء^{٢} هـ^{٢} + ٧ ح ء^{٣} هـ + هـ^{٤} −
٣ ح^{٢} ء هـ^{٣} فى ٣ ح^{٢} ء − هـ

(٤٨) ح^{٤} + ح^{٢} ء^{٢} + ء^{٤} − ح^{٣} ء فى ح + ء

المطلوب ايجاد مقادير الكميات الآتية بدون اجراء عملية الضرب

(٤٩) (س + ل)^{٢} ، (٣ س − ٢ ل)^{٢} ، (٢ س + ١)^{٢}
، (٢ س − ١)^{٢}

(٥٠) (س + ء) (س − ء) ، (س − ل) (س + ل)
، (س + ١) (س − ١)

(٥١) (أ + ب)^{٣} ، (٥ أ + ٦ ب)^{٣} ، (ح − ء)^{٣}
، (ح^{٢} − ء^{٢})^{٢}

(٥٢) (ح + ء) (ح^{٢} − ح ء + ء^{٢}) ، (س − ص)
(س^{٢} + س ص + ص^{٢})

(٥٣) (ح + ء) (ح + هـ) ، (ح + ء) (ح − هـ)
، (ح − ء) (ح − هـ)

(٥٤) (أ + ب + ح)^{٢} ، (أ + ب − ٣ ح + هـ)^{٢}

$\left(\frac{1}{2} ا + \frac{1}{4} ب - \frac{1}{5} ح + \frac{1}{6} و + \frac{1}{8} هـ\right)^2$ ،

(٥٥) المطلوب ايجاد حاصل ضرب $(س - ٢)^2 (س^2 + ٥ س + ١)$ ، $(س + ٢)^2 (٣ س^2 - ٤ س + ١)$

(٥٦) ما المقدار الرقمي لحاصل ضرب $(٥ ح^4 + ٤ ح^3 + ٨ ح^2 - ٢٥)(٢ ح^5 - ٣ ح^3 + ٤ ح^2 - ٥ ح - ٧)$ اذا كان $ح = ٢$

(٥٧) ما الفرق بين مربعي عددين متواليين مثل ح ، (ح + ١) وتطبق ذلك على ٤٩ ، ٥٠

(٥٨) ما الفرق بين مكعبي عددين متواليين مثل س ، (س + ١)

المطلوب تحقيق المتساويات الآتية

(٥٩) $\left(\frac{ا + ب}{2}\right)^2 - \left(\frac{ا - ب}{2}\right)^2 = ا ب$ ،

$\frac{1}{2}(ا + ا^-)(ب - ب^-) + \frac{1}{2}(ب + ب^-)(ا - ا^-) = ا ب - ا^- ب^-$

(٦٠) $\frac{1}{2}(ا + ب)^2 + \frac{1}{2}(ا - ب)^2 = ا^2 + ب^2$

استعمال الاقواس

(٥٠) قد يحتاج فى كثير من الاحوال الى استعمال الاقواس فلنبين أنواع الاقواس واستعمالها وكيفية حذفها

(٥١) أنواع الاقواس ـ الاقواس المستعملة عادة هى ( )
،{ }، [ ]

(٥٢) استعمال الاقواس ـ تستعمل الاقواس حينما يراد بيان اضافة المجموع الجبرى لجملة كميات الى كمية أخرى (بسيطة أومركبة) أو طرحه منها أو ضربه فيها أو قسمته عليها (أحيانا) وقد يتكرر ذلك فنجعل كل كمية ذات حدين فأكثر بين قوسين مثلا اذا أريد بيان أن المجموع الجبرى للكميات ح ، ى ، ـــ هـ مضاف الى كمية ب يكتب ب + (ح + ى ـــ هـ) واذا أريد بيان طرحه من ب يكتب ب ـــ (ح + ى ـــ هـ)
فاذا أريد بيان ضربه فى ب يكتب (ح + ى ـــ هـ) ب
واذا أريد بيان قسمته على ب يكتب (ح + ى ـــ هـ) : ب
وكمية ب اما أن تكون ذات حد واحد أوذات حدين فأكثر انما اذا لم تكن ذات حد واحد يلزم وضعها بين قوسين أيضا فاذا فرض أن ب = س ـــ ص وأريد بيان طرح المجموع السابق منها كتب (س ـــ ص) ـــ (ح + ى ـــ هـ)
ثم اذا أريد بيان أن الفرق بين ب والمجموع السابق مضروب فى كمية ع يكتب
ع [ب ـــ (ح + ى ـــ هـ)]
فاذا أريد بيان أن الفرق بين هـذا الحاصل وكمية ل مضروب فى ع يكتب
ع [ل ـــ ع { ب ـــ (ح + ى ـــ هـ) }]

وقد توضع شرطة أفقية فوق كمية مركبة من حدين فأكثر فنعتبر أن هذه الكمية موضوعة بين قوسين

فالوضع ح − (د − هـ) و ح − $\overline{\text{د − هـ}}$ بمعنى واحد

و يستعمل هذا الوضع الاخير غالبا عند الاحتياج الى أقواس أكثر مما تقدم

ومتى استعملت الاقواس باشكال مختلفة فكل قوسين من شكل واحد يحصران بينهما كميتهما الخصوصية وعموما يعتبر فى كل كمية موضوعة بين قوسين من نوع واحد أنه قد أجرى على تلك الكمية ما تقتضيه الاشارات الدالة على ارتباط حدودها ببعضها وأن ما بين القوسين يدل على تلك النتيجة

(٥٣) حذف الاقواس – يبدأ أولا بحذف القوسين الداخلين ثم الخارجين عنهما بالتدريج

ويتأمل عند حذف كل قوسين من نوع واحد للعلامة السابقة عليهما الدالة على ارتباط الكمية المحصورة بينهما بما قبلها لاجراء العمل بما تقتضيه هذه العلامة

ومتى كانت الكمية التى بين القوسين مسبوقة بمكرر يلزم ضرب جميع حدودها فيه مثلا لحذف الاقواس من الوضع الآتى يجرى العمل بمقتضى ما ذكر هكذا

ع [ل − ع { ب − (ح + د − هـ) }] أو

ع [ل − ع (ب − ح − د + هـ)] أو

ع [ل − (عب − عح − عد + عهـ)] أو

ع (ا − ح ب + ح ﺣ + ح ى − ح ﻫ) أو

ع ا − ع ح ب + ع ح ﺣ + ع ح ى − ع ح ﻫ

(٥٤) بالعكس وضع كميات بين قوسين — يمكن حصر كميات بين أقواس مسبوقة بعلامة + بدون تغيير اشاراتها ويمكن حصر كميات بين أقواس مسبوقة بعلامة — مع تغيير اشاراتها

فلوضع الكمية ٣ س − ٢ ص + ع بين قوسين مسبوقين بعلامة + يكتب هكذا (٣ س − ٢ ص + ع)

ولوضعها بين قوسين مسبوقين بعلامة — يكتب هكذا

− (− ٣ س + ٢ ص − ع)

تمارين

المطلوب حذف الاقواس من الكميات الآتية

(٦١) ا − (ب − ﺣ) + ا + (ب − ﺣ) + ب − (ﺣ + ا)

(٦٢) ا − [ب + { ا − (ب + ا) }]

(٦٣) ا − [٢ ا − { ٣ ب − (٤ ﺣ − ٢ ا) }]

(٦٤) { ا − (ب − ﺣ) } + { ب − (ﺣ − ا) } − { ﺣ − (ا − ب) }

(٦٥) − (− (− (− س))) − (− (− ص))

القسمة

(٥٥) تعريف ــ الغرض من قسمة كميتين جبريتين على بعضهما ايجاد كمية ثالثة اذا ضرب مقدارها العددى فى المقدار العددى لكمية المقسوم عليه يكون الناتج مساويا للمقدار العددى لكمية المقسوم

(٥٦) تشتمل القسمة الجبرية على ثلاث حالات الاولى قسمة حد على حد الثانية قسمة كمية كثيرة الحدود على حد الثالثة قسمة كمية كثيرة الحدود على مثلها

قسمة حد على حد

(٥٧) قاعدة ــ لقسمة حد على حد يقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه ويوضع على يساره كل حرف مشترك بأس يساوى باقى طرح أسه فى المقسوم عليه من أسه فى المقسوم ثم يوضع كل حرف وجد فى المقسوم دون المقسوم عليه كما هو ويقرن الخارج بعلامة + اذا اتحد علامتا المقسوم والمقسوم عليه وبعلامة ناقص اذا اختلفت العلامتان

فعلى هذا يكون ٢١ ح^{٥} ء^{٣} هـ^{٢} : ٣ ح^{٣} ء^{٢} = ٧ ح^{٢} ء هـ^{٢} ،

− ٢٤ ح^{٣} ء^{٢} هـ^{٢} : −٨ ح ء هـ = ٣ ح^{٢} ء^{٢} هـ ،

− ١٥ ح ء^{٣} و : ٣ ح^{٣} ء^{٢} = − ٥ ح^{٣} ء و ،

٧٢ س ص^{٣} : −٩ ص^{٢} = − ٨ س ص

(٥٨) الحرف ذو الاس الصفر اذا قسم $\text{ح}^{٣}$: $\text{ح}^{٣}$ كان الخارج $\text{ح}^{٠}$ ومعلوم أنه اذا كان المقسوم يساوى المقسوم عليه يكون الخارج يساوى واحدا فعلى هذا يكون $\text{ح}^{٣} : \text{ح}^{٣} = ١$ وحينئذ يكون $\text{ح}^{٠} = ١$ أعنى أن كل حرف أسه صفر يساوى واحدا

وينتج من ذلك أنه اذا وجدت حروف فى المقسوم والمقسوم عليه بأسس متحدة يلزم محوها وعلى هذا يكون

$$٧٢\,\text{ح}\,\text{د}^{٢}\,\text{ه}^{٣} : -٨\,\text{ح}\,\text{د}\,\text{ه}^{٣} = -٩\,\text{د}$$

(٥٩) استحالة قسمة حد على حد ـ قسمة حد على حد تكون غير ممكنة اذا كان أس حرف فى المقسوم عليه أكبر من أسه فى المقسوم أو وجد حرف فى المقسوم عليه ولم يوجد فى المقسوم (ومعنى عدم الامكان أن الخارج يكون كسريا) وفى هذه الحالة يبين الخارج بكسر ويختصر على قدر الامكان بحذف العوامل المشتركة بين المقسوم والمقسوم عليه

فعلى هذا يكون $١٨\,\text{ح}^{٢}\,\text{د}^{٣}\,\text{ه} : ١٤\,\text{ح}^{٤}\,\text{د}^{٢}\,\text{و}^{٢} =$

$$\frac{١٨\,\text{ح}^{٢}\,\text{د}^{٣}\,\text{ه}}{١٤\,\text{ح}^{٤}\,\text{د}^{٢}\,\text{و}^{٢}} = \frac{٩\,\text{د}\,\text{ه}}{٧\,\text{ح}^{٢}\,\text{و}^{٢}}$$

(٦٠) الحرف ذو الاس السالب ـ تقدم أن قسمة $\text{ح}^{٣}$ على $\text{ح}^{٥}$ غير ممكنة وأن الخارج يبين بكسر هكذا $\frac{\text{ح}^{٣}}{\text{ح}^{٥}}$

وبحذف العوامل المشتركة بين الحدين ينتج $\frac{١}{\text{ح}^{٢}}$

ولكن اذا طبقنا القاعدة السابقة ولاحظنا أن طرح ٥ من ٣ يؤدى الى − ٢ ينتج أن حـ^{٣} : حـ^{٥} = حـ$^{-٢}$ وحيث كان كل من حـ$^{-٢}$ ، $\frac{١}{حـ^{٢}}$ يدل على خارج قسمة حـ^{٣} : حـ^{٥} فيكونان متساويين ويكون حـ$^{-٢}$ = $\frac{١}{حـ^{٢}}$ وينتج من ذلك أن الحرف ذا الاس السالب يساوى واحدا مقسوما على هذا الحرف بأس موجب

قسمة كثيرة الحدود على حد

(٦١) قاعدة ـ لقسمة كمية كثيرة الحدود على حد نقسم كل حد منها على المقسوم عليه

فخارج قسمة ١٥ حـ^{٢} ء^{٣} − ٢٥ حـ^{٣} ء^{٤} + ٤٠ حـ^{٤} ء^{٥} − ٢٠ حـ^{٥} ء^{٦} على ٥ حـ ء^{٢} هو

٣ حـ ء − ٥ حـ^{٢} ء^{٢} + ١٨ حـ^{٣} ء^{٣} − ٤ حـ^{٤} ء^{٤}

(٦٢) تنبيه (١) اذا استحالت قسمة بعض حدود المقسوم على المقسوم عليه نضعها على صورة كسر فخارج قسمة ٤ حـ^{٤} ء^{٣} + ١٢ حـ^{٣} ء^{٤} − حـ^{٢} ء^{٥} على ٢ حـ^{٣} ء^{٢} هو ٢ حـ ء + ٦ ء^{٢} − $\frac{ء^{٣}}{٢ حـ}$

(٦٣) تنبيه (٢) اذا احتوت ذات الحدود على حرف أو حروف مشتركة فى جميع حدودها أمكن أخذ الحروف المشتركة بأقل أس لها وقسمة الكمية عليها واعتبار الخارج مضروبا مشتركا فى ذلك الحد (وهذا ما يسمى بأخذ مضروب مشترك) فعلى هذا فى الكمية ٢ حـ^{٢} ء^{٢} − ٣ حـ^{٢} ء هـ + ٥ حـ^{٢} ء و + حـ^{٢} ء يمكن أخذ حـ^{٢} ء مضروبا مشتركا ويصير هكذا

(٢ ء − ٣ هـ + ٥ و + ١) حـ^{٢} ء

قسمة كمية كثيرة الحدود على مثلها

(٦٤) قاعدة — لقسمة كمية كثيرة الحدود على مثلها يرتبان بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف مشترك فيهما ثم يقسم أول حد من عين المقسوم على أول حد من عين المقسوم عليه فينتج أول حد من خارج القسمة يضرب فى المقسوم عليه ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم أول حد من الباقى على أول حد من المقسوم عليه فينتج ثانى حد من الخارج يضرب فى المقسوم عليه ويطرح الحاصل من الباقى الاول ويستمر العمل الى أن يصير الباقى صفرا أو تستحيل قسمته على المقسوم عليه

فاذا أريد قسمة $٣١ ح د^{٣} + ح^{٣} د - ٢٠ د^{٤} - ١٤ ح^{٢} د^{٢} + ٦ ح^{٤}$ على $٣ ح د + ٢ ح^{٢} - ٤ د^{٢}$ يرتبان بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ح ويجرى العمل هكذا

$٦ ح^{٤} + ح^{٣} د - ١٤ ح^{٢} د^{٢} + ٣١ ح د^{٣} - ٢٠ د^{٤}$	$٢ ح^{٢} + ٣ ح د - ٤ د^{٢}$
$- ٦ ح^{٤} - ٩ ح^{٣} د + ١٢ ح^{٢} د^{٢}$	$٣ ح^{٢} - ٤ ح د + ٥ د^{٢}$
$- ٨ ح^{٣} د - ٢ ح^{٢} د^{٢} + ٣١ ح د^{٣} - ٢٠ د^{٤}$	
$٨ ح^{٣} د + ١٢ ح^{٢} د^{٢} - ١٦ ح د^{٣}$	
$١٠ ح^{٢} د^{٢} + ١٥ ح د^{٣} - ٢٠ د^{٤}$	
$- ١٠ ح^{٢} د^{٢} - ١٥ ح د^{٣} + ٢٠ د^{٤}$	

(٦٥) تنبيهات — الاول يحسن عند اجراء الاعمال أن لاينزل في الباقي الاول جميع حدود المقسوم مرة واحدة وانما ينزل شيأ فشيأ في البواقي الاول والتالية له بحسب اللزوم

ففي المثال السابق نرى أن الحد — ٢٠ ء٤ لم يستعمل في الباقي الاول وانما استعمل في الباقي الثاني فمثل هذا الحد يستغنى عن تنزيله في الباقي الاول وينزل في الثاني

ومع كثرة التمرينات يتيسر للطالب الوقوف على مايلزم تنزيله من الحدود في كل باق بحسب كل عمليـة

التنبيـه الثاني بعـد ترتيب المقـسوم والمقـسوم عليـه بالنسـبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف فيهما تكون القسمة غير ممكنـة متى كان الحـد الاول من المقسوم لا يقبـل القسمة على الحـد الاول من المقسوم عليه أوكان الحـد الاخير من المقسوم لايقبـل القسمة على الحـد الاخير من المقسوم عليه أوكان الحد الاول من أى باق لايقبـل القسمة على الحـد الاول من المقسوم عليه

الثالث — متى توصلنا الى باق لايمكن قسمة الحـد الاول منه على الحد الاول من المقسوم عليه يعتـبر الباقي المذكور هو باقي القسمة ثم يكمل الخارج بكسر بسـطه الباقي ومقامـه المقسوم عليه

فلقسمة س٢ ح — س ح٢ + وعلى س — ء نجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} س^{٢}ح - س ح^{٢} + و & س + ح \\ \hline - س^{٢}ح - س ح & س ح - ٢ح^{٢} \\ \hline - ٢س ح^{٢} + و & \\ + ٢س ح^{٢} + ٢ح^{٣} & \\ \hline ٢ح^{٣} + و & \end{array}$$

ويكون الخارج الحقيقي هو $س ح - ٢ ح^{٢} + \frac{٢ح^{٣} + و}{س + ح}$

(الرابع) قد غيرنا في المثالين السابقين اشارات حاصل ضرب كل حد من حدود خارج القسمة في المقسوم عليه للزوم طرح تلك الحواصل من المقسوم أو الباقي كما تقتضيه قاعدة الطرح نمرة ٢٨ ولكن مع كثرة التمرين يتيسر للطالب أن يضع الحاصل بدون تغير ويلاحظ التغير عقليا وقت اختصار الحدود المتشابهة كما في نمرة ٢٩

قابلية قسمة كثيرة الحدود على ذات الحدين بدرجة أولى

(٦٦) قاعدة — باقي قسمة كثيرة الحدود الصحيحة بالنسبه الى س على س — ح يساوي المقدار الناتج من استعاضة س فيها بالمقدار ح

أي أن باقي قسمة كثيرة الحدود $أ س^{م} + ب س^{م-١} + ء س^{م-٢} ..... ق س + ع$ المرتبة بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف س على $(س - ح)$ هو

$$أ ح^{م} + ب ح^{م-١} + ء ح^{م-١} + ... ق ح + ع$$

وذلك لانه عكن الاستمرار فى القسمة الى أن ينتج باق درجـة حرف الترتيب فيـه أقل من درجة حرف الترتيب فى المقسوم عليه (لان المقسوم عليه بدرجة أولى) وبناء عليه فلا يشتمل على س فاذا رمز للجزء الصحيح من الخارج بحـرف غ والباقى بحرف ب يكون

$$ا س^م + ب س^{م-١} + ء س^{م-٢} + \dots ق س + ع = (س - ح) غ + ب$$

وحيث ان هذه المتساوية تكون حقيقية بأى مقدار يفرض الى س فاذا فرض أن س = ح آلت الى $ا ح^م + ب ح^{م-١} + ء ح^{م-٢}$ ..... $ق ح + ع = (ح - ح) غ + ب$

ولما كان فى هذه الحالة المقدار (ح — ح) غ معدوما كان

$$ب = ا ح^م + ب ح^{م-١} + ء ح^{م-٢} + \dots + ق ح + ع$$

وهو المراد ايضاحه

مثلا باقى قسمة $٢ س^٣ - ٤ س^٢ + ٥ س - ٤$ على س — ٣ هو

$$٢ \times ٣^٣ - ٤ \times ٣^٢ + ٥ \times ٣ - ٤ = ٢٩$$

واذا أجريت عملية القسمة ترى أن الجزء الصحيح من الخارج هو $٢ س^٢ + ٢ س + ١١$ والباقى ٢٩

(٦٧) قاعـدة اذا غير فى كمية كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة الى س الحرف س بالحرف ح وآلت بذلك الى صفر كانت قابلة للقسمة على س — ح.

وذلك لانه لما كان الفرض أنها تنعدم من تغير س الى ح فينعدم الباقى وحينئذ تكون قابلة للقسمة على س ــ ح

فكثيرة الحدود س^٣ ــ ٦ س^٢ + ١١ س ــ ٦ تقبل القسمة على س ــ ٣ لانه اذا غير س بالمقدار ٣ تؤل الى ٣^٣ ــ ٦ × ٣^٢ + ١١ × ٣ ــ ٦ أى ٢٧ ــ ٥٤ + ٣٣ ــ ٦ أى ٦٠ ــ ٦٠ = ٠ وباجراء عملية القسمة نرى أن الخارج س^٢ ــ ٣ س + ٢

(٦٨) قاعدة ــ باقى قسمة كثيرة الحدود الصحيحة بالنسبة الى س على س + ح يساوى الناتج من استعاضة س بالمقدار ــ ح

ويستدل على ذلك كما سبق فى نمرة ٦٦

مثلا باقى قسمة ٣ س^٤ + ٤ س^٣ ــ ٢ س^٢ ــ ٣ س + ٢ على (س + ٢) هو

٣ (ــ ٢)^٤ + ٤ (ــ ٢)^٣ ــ ٢ (ــ ٢)^٢ ــ ٣ (ــ ٢) + ٢ أى ٤٨ ــ ٣٢ ــ ٨ + ٦ + ٢ = ٥٦ ــ ٤٠ = ١٦

واذا أجريت عملية القسمة يرى أن الجزء الصحيح من الخارج ٣ س^٣ ــ ٢ س^٢ + ٢ س ــ ٧ والباقى ١٦

(٦٩) قاعدة ــ اذا غير فى كمية كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة الى س الحرف س بالمقدار ــ ح وآلت بذلك الى صفر كانت قابلة للقسمة على س + ح

لأنه لما كان الفرض أنها تؤل إلى الصفر بتغيير س الى ــ ح

فينعدم الباقي وحينئذ تقبل القسمة على $س + ح$

فكثيرة الحدود $٢ س^{٤} + ٣ س^{٣} - ١٧ س^{٢} + ١٠ س - ٨$ تقبل القسمة على $س + ٤$ لأنه اذا غير فيها س بالمقدار $- ٤$ تؤل الى

$٢ (-٤)^{٤} + ٣ (-٤)^{٣} - ١٧ (-٤)^{٢} + ١٠ (-٤) - ٨$ أو

$٥١٢ - ١٩٢ - ٢٧٢ - ٤٠ - ٨$ أو $٥١٢ - ٥١٢ = ٠$

واذا أجريت عملية القسمة يرى أن الخارج $٢ س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٣ س - ٢$

نتائج وقوانين عمومية

(٧٠) أولا ـ ذات الحدين $س^{م} - ح^{م}$ تقبل القسمة على $س - ح$

لانه اذا غير فيها س بالمقدار ح تؤل الى $ح^{م} - ح^{م}$ وهذا المقدار يساوى صفرا وبناء على قاعدة نمرة ٦٧ تكون الكمية المفروضة قابلة للقسمة على $س - ح$ وهذه القاعدة يعبر عنها عادة هكذا

فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة ما يقبل القسمة على فاضلهما غير مرفوعتين

وعلى هذا اذا قسم $س^{٥} - ح^{٥}$ على $س - ح$ يرى أن الخارج

$س^{٤} + ح س^{٣} + ح^{٢} س^{٢} + ح^{٣} س + ح^{٤}$

(٧١) ثانيا — ذات الحدين $س^م + ح^م$ لا تقبل القسمة على $س - ح$

لانه اذا غير فيها س بالمقدار ح تؤل الى $ح^م + ح^م = ٢ ح^م$ وبناء على قاعدة (نمرة ٦٨) يكون $٢ ح^م$ هو الباقى

ويعبر عن هذه القاعدة بما يأتى

مجموع الكميتين المرفوعتين الى قوة ما لا يقبل القسمة على فاضلهما غير مرفوعتين

وعلى هذا اذا قسم $س^٣ + ح^٣$ على $س - ح$ ينتج الجزء الصحيح من الخارج $س^٢ + ح س + ح^٢$ والباقى $٢ ح^٣$

(٧٢) ثالثا — ذات الحدين $س^م - ح^م$ تقبل القسمة على $س + ح$ اذا كان م زوجيا ولا تقبل القسمة على $س + ح$ اذا كان م فرديا

لانه اذا غير س بالمقدار $- ح$ تؤل الى $(- ح)^م - ح^م$

فاذا كان م زوجيا يكون $(- ح)^م$ موجبا (نمرة ٣٤) ويساوى $ح^م$ ويؤل المقدار المذكور الى صفر وهذا يدل على أنها تقبل القسمة على $س + ح$ (نمرة ٦٩)

واذا كان م فرديا يكون $(- ح)^م$ سالبا (نمرة ٣٤) ويساوى $- ح^م$ ويؤل المقدار المذكور الى $- ٢ ح^م$ وهذا يدل على أنها لاتقبل القسمة على $س + ح$ (نمرة ٦٩) ويعبر عن هذه

القاعدة بما يأتى

فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة ما يقبل القسمة على مجموعهما اذا كانت درجة القوة زوجية ولا يقبل القسمة على ذلك المجموع اذا كانت القوة فردية

(مثال ١) اذا فرض أن م زوجيا ويساوى ٤ يحدث

$$(س^{٤} - ح^{٤}) : (س + ح) = س^{٣} - ح س^{٢} + ح^{٢} س - ح^{٣}$$

(مثال ٢) اذا فرض أن م فرديا ويساوى ٣ يحدث

$$(س^{٣} - ح^{٣}) : (س + ح) = س^{٢} - ح س + ح^{٢} - \frac{٢ح^{٣}}{س + ح}$$

(٧٣) رابعا – ذات الحدين $س^{م} + ح^{م}$ تقبل القسمة على $س + ح$ اذا كان م فرديا ولا تقبل القسمة اذا كان م زوجيا لانه اذا غير س بالمقدار $- ح$ تؤل الى $(- ح)^{م} + ح^{م}$ فاذا كان م فرديا يكون $(- ح)^{م}$ سالبا (نمرة ٣٤) وتؤل ذات الحدين الى صفر وهذا يدل على أنها قابلة للقسمة على $س + ح$ كما فى (نمرة ٦٩) واذا كان م زوجيا يكون $- ح^{م}$ موجبا (نمرة ٣٤) وتؤل ذات الحدين الى $٢ ح^{م}$ وهذا يدل على أنها لا تقبل القسمة على $س + ح$ كما فى (نمرة ٦٨)

ويعبر عن هذه القاعدة بما يأتى

مجموع الكميتين المرفوعتين الى قوة ما يقبل القسمة على مجموع

هاتين الكميتين اذا كانت درجة القوة فردية ولا يقبل القسمة على ذلك المجموع اذا كانت درجة القوة زوجية

مثال ١ اذا فرض ان م = ٣ يحدث

$(سـ^{٣} + حـ^{٣}) : (سـ + حـ) = سـ^{٢} - حـ سـ + حـ^{٢}$

مثال ٢ اذا فرض أن م = ٢ يحدث

$(سـ^{٢} + حـ^{٢}) : (سـ + حـ) = سـ - حـ + \frac{٢حـ^{٢}}{سـ + حـ}$

تمارين

المطلوب ايجاد خارج قسمة

(٦٦) $حـ^{٣}$ على $حـ$ ، $١٥ هـ^{٢} ء^{٣} : - ٣ هـ ء^{٢}$ ، $- ٢٤ ء^{٤} هـ^{٣} و : ٨ ء^{٣} هـ$

(٦٧) $أ^{٤} ب^{٣} حـ^{٢} : - ١٤ أ^{٢} ب^{٢} حـ^{٢}$ ، $٤٥ م^{٢} ن : - ٣ م^{٢}$ ، $حـ سـ^{٣} : سـ^{٢}$

(٦٨) $حـ^{م} : حـ^{ن}$ ، $٧ سـ^{م} : ٣ سـ^{م-١}$ ، $- ٧٢ سـ^{٥} صـ^{٢} : ١٨ سـ صـ^{٥}$

(٦٩) $١٨ سـ^{٤} صـ^{٥} : ٩ سـ^{٧} صـ$ ، $٤٤ م^{٢} ء^{٣} : ١١ م^{٢} ء^{٣}$ ، $\frac{١}{٤} ع^{٣} : \frac{١}{٣} ع^{٢}$

(٧٠) ما مقدار $سـ^{٠}$ ، $صـ^{٠}$ ، $سـ^{-١}$ ، $صـ^{-٣}$ ، $سـ^{-٥}$ ، $صـ^{-ن}$ بفرض أن $حـ = ٤$

(٧١) ابحث عن مجموع الكميات $حـ^{٢}$ ، $حـ^{٠}$ ، $حـ^{-١}$ ، $حـ^{-٢}$

المطلوب ايجاد خارج قسمة

(٧٢) (ح^{٣} ء + ٣ ح^{٢} ء^{٢} − ٢ ح ء^{٣}) : ح ء ،
(٢٤ س^{٤} ص^{٣} − ١٨ س^{٣} ص^{٢} + ١٥ س^{٥} ص^{٤})
على ٣ س^{٣} ص ، (٤ ح^{٢} ء^{٣} و^{٤} + ٨ ح^{٣} ء^{٢} هـ − ٢ ح^{٥} ء^{٦} ع)
: ٢ ح^{٢} ء^{٢}

(٧٣) (م ق س + م ق ص − م ق ع + ٨ م ق) : على
م ق ، (ب^{٤} + ب^{٣} − ب^{٢} + ب) : ب

(٧٤) (٣٠ ح^{٢} ء^{٣} + ٢٥ ح^{٣} ء^{٤} + ٤٠ ح^{٤} ء^{٥} − ١٠ ح^{٥} ء^{٦})
: ٥ ح^{٢} ء^{٣}

(٧٥) ٣ ح^{٣} − ٧ ح^{٤} ء − ١٢ ح^{٥} ء^{٢} + ٤ ح ء^{٣} على ٣ ح
− ٢ ح^{٢} ء

(٧٦) ٦ ب + ٣٦ ب^{٤} ح^{٢} + ٦٢ ب^{٢} ح^{٤} + ٣٦ ح − ١٧
ب^{٥} ح − ٤٩ ب^{٣} ح^{٣} − ٥٤ ب ح^{٥} على ٦ ح^{٢} + ٣ ب^{٢}
− ٤ ب ح

(٧٧) ٣٥ ح^{٥} + ١٨ ح^{٤} ء − ١٠ ح^{٣} ء^{٢} + ٤٤ ح^{٢} ء^{٣} − ٤٨ ح ء^{٤}
على ٥ ح^{٢} + ٤ ح ء − ٦ ء^{٢}

(٧٨) ٣٦ ح^{٦} ء^{٢} + ح^{٥} ء^{٣} + ٧١ ح^{٢} ء^{٦} + ٢٢ ء^{٨} − ٢١ ح ء^{٧}
− ٤٣ ح^{٤} ء^{٤} − ٨ ح^{٣} ء^{٥} − ٦٨ ح ء^{٧} على ٥ ح ء^{٢} − ٧ ح ء^{٢} − ٤ ء^{٣}

(٧٩) ١٥ أ^{٦} ب^{٤} − ١٦ أ^{٥} ب^{٥} + ٢٩ أ^{٤} ب^{٦} − ١٥ أ^{٣} ب^{٧} +
٢ أ^{٢} ب^{٨} على ٥ أ^{٢} ب^{٢} − ٢ أ ب^{٣}

(٨٠) $س^{٥} - ٣ س^{٤} - ٨ س^{٣} - ٣ س + س$ على $س$
$+ ٢ س + ١$

(٨١) ما باقى قسمة الكمية الآتية على $ح - ٢$ وعلى $ح - ٥$
وهى $٣٢ ح^{٥} - ٢٤ ح^{٤} + ١٢ ح^{٢}$

(٨٢) ما باقى قسمة الكمية الآتية على $س + ٣$ ، $س$
$+ ٤$
وهى $س^{٤} - ٣ س^{٣} + ٥ س^{٢} - س + ١٢$

(٨٣) ما الذى يلزم اضافته الى الكمية الآتية لتصير قابلة للقسمة على $ص - ٣$ وهى
$ص^{٥} - ٤ ص^{٤} + ٣ ص^{٣} - ٢ ص + ٤$

(٨٤) المطلوب أن تبين بدون اجراء عملية القسمة أى الكميتين $ح^{٧} + ء^{٧}$ ، $ح^{٧} - ء^{٧}$ تقبل القسمة على $ح - ء$ وأيهما تقبل القسمة على $ح + ء$

(٨٥) المطلوب بيان الكميات التى تقبل القسمة على $(ح + ء)$ من الكميات الآتية

$ح^{٥} - ء^{٥}$ ، $ح^{٦} + ء^{٦}$ ، $ح^{١١} + ء^{١١}$ ، $ح^{١٢} - ء^{١٢}$

مع بيان الباقى للكميات التى لاتقبل القسمة على $ح + ء$

تحليل ذات الحدود الى عوامل

(٧٤) تمهيد اذا كان مقدار جبرى مكون من حاصل ضرب

كميتين صحيحتين أو أكثر فكل من هـذه الكميات يسمى عامـلا لهذا المقدار

(٧٥) تعريف ـ تحليل مقدار جبرى الى عوامل هو عبارة عن ايجاد العوامـل الصحيحـة التى اذا ضربت فى بعضها ينتج المقدار المذكور

ولا يقصد عادة من تحليل المقـدار الجـبرى الا ايجاد العوامـل الصحيحة الجذرية

(٧٦) لما كان حاصـل ضرب كل كميتين جـبريتين أوأكـثرلا يوجد بصورة واحـدة نظرا لاختلاف عوامـل كل حاصـل فلا يتيسر اتخاذ قاعدة واحـدة فى ايجاد العوامـل ولذلك نذكر أكثر الطرق استعمـالا فى التحليل على حسب أحوال الكميات فنقول

(٧٧) القاعدة الاولى ـ اذا احتوت جميع حـدود الكمية المراد تحليلها على كمية مشتركة فيمكن قسمة جميع هذه الحدود على الكمية المشتركة وبذلك تحلل ذات الحـدود الى مضروبين مثلا فى ذات الحدين $٣ ح^{٢} ب - ٦ ح ب^{٢}$ يشاهد أن الكمية $٣ ح ب$ مشتركة بين حديها فبقسمتها على $٣ ح ب$ ينتج $ح - ٢ ب$

واذا يكون $٣ ح^{٢} ب - ٦ ح ب^{٢} = ٣ ح ب (ح - ٢ ب)$

وبالمثل يكون $٥ ح^{٢} ب س^{٣} - ١٥ ح ب س^{٢} - ٢٠ ب^{٢} س^{٢}$

$= ٥ ب س^{٢} (ح^{٢} س - ٣ ح - ٤ ب)$

(٧٨) القاعدة الثانية ـ تقدم بنمرة (٤٠) أن $(ح + ء)^{٢}$

= حٓ + ٢ ح ى + ىٓ وبنمرة (٤١) أن (ح ــ ى)ٓ =
حٓ ــ ٢ ح ى + ىٓ

فاذا كان المقدار الجبرى مكونا من مجموع مربعى كميتين ومضافا اليه أو مطروحا منه ضعف حاصل ضربهما كان مساويا لمربع مجموع هاتين الكميتين أو لمربع الفرق بينهما

ويجب ملاحظة أن الحدين المربعين يكونان موجبين

مثلا سٓ + ٢ س ص + صٓ = (س + ص) (س + ص) ،

حٓ + ٦ ب ح + ٩ بٓ = (ح + ٣ ب) (ح + ٣ ب) ،

٢٥ حٓ ــ ٢٠ ح ى + ٤ ىٓ = (٥ ح + ٢ ى) (٥ ح ــ ٢ ى)

(٧٩) القاعدة الثالثة تقدم بنمرة (٤٣) أن

(ح + ى) (ح ــ ى) = حٓ ــ ىٓ

ويؤخذ من هذا أنه اذا كان المقدار الجبرى مركبا من الفرق بين مربعى كميتين كان مساويا لحاصل ضرب مجموع هاتين الكميتين فى الفرق بينهما

فعلى هذا يكون ٢٥ حٓ ــ ٤ بٓ = (٥ ح + ٢ ب) (٥ ح ــ ٢ ب)

وأيضا ٣٦ س٤ صٓ ــ ١ = (٦ سٓ ص + ١) (٦ سٓ ص ــ ١)

(٨٠) القاعدة الرابعة تقدم بنمرة (٤٦) أن

$(ا - ب)(ا^٢ + اب + ب^٢) = ا^٣ - ب^٣$ وبنمرة (٤٧) أن

$(ا + ب)(ا^٢ - اب + ب^٢) = ا^٣ + ب^٣$

فيؤخذ من هذا أنه اذ كان المقدار الجبرى مركبا من الفرق بين مكعبي كميتين كان مساويا لحاصل ضرب الفرق بين هاتين الكميتين فى المجموع الناتج من مربع الاولى وحاصل ضرب الاولى فى الثانية ومربع الثانية

واذا كان المقدار الجبرى مركبا من مجموع مكعبي كميتين كان مساويا لحاصل ضرب مجموع هاتين الكميتين فى الناتج من مربع الاولى ناقصا حاصل ضربها فى الثانية مضافا للباقى مربع الثانية

فعلى هذا يكون $س^٣ - ص^٣ = (س - ص)(س^٢ + س ص + ص^٢)$ ،

$١٢٥ ح^٦ ء^٣ - ٨ هـ^٣ = (٥ ح^٢ ء - ٢ هـ)(٢٥ ح^٤ ء^٢ + ١٠ ح^٢ ء هـ + ٤ هـ^٢)$ ،

$ح^٣ + ء^٣ = (ح + ء)(ح^٢ - ح ء + ء^٢)$ ،

$٢٧ ح^٩ + و^٣ = (٣ ح^٣ + و)(٩ ح^٦ - ٣ ح^٣ و + و^٢)$

(٨١) القاعدة الخامسة — تقدم بنمرة ٤٨ أن

$(س + ا)(س + ب) = س^٢ + (ا + ب) س + اب$

فاذا كان المقدار الجبرى مركبا من مربع كمية ومن مجموع كميتين أخريين مضروبا فى تلك الكمية ومن حاصل ضرب الكميتين

المذكورتين أمكن تحليله الى عاملين كما فى الامثلة الآتية

المثال الاول س^{٢} + ١١ س + ٢٤ فنعتبر أن ٢٤ عبارة عن ا ب و ١١ عبارة عن (ا + ب) ثم نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٢٤ ومجموعهما ١١ وحيث ان أزواج الاعداد التى حاصل ضربها ٢٤ هى ١و٢٤ ، ٢و١٢ ، ٣و٨ ، ٤و٦ ولم يكن فيها ماهو مجموعه ١١ الا ٣و٨ فاذن يكون

س^{٢} + ١١ س + ٢٤ = (س + ٨) (س + ٣)

المثال الثانى ليكن المطلوب تحليل س^{٢} − ٧ س + ١٠

فنعتبر أن ١٠ هو عبارة عن ا ب ، − ٧ هو ا + ب فنبحث عن عددين حاصل ضربهما ١٠ ومجموعهما − ٧ وحيث ان حاصل ضربهما موجب فيكونان اما موجبين أو سالبين ولكن حيث كان مجموعا سالبا فيكونان سالبين وأزواج الاعداد السالبة التى حاصل ضربها ١٠ هى − ١ ، − ١٠ ، − ٢ ، − ٥ وحيث ان مجموع هذا الزوج الاخير هو − ٧ يكون

س^{٢} − ٧ س + ١٠ = (س − ٥) (س − ٢)

المثال الثالث ليكن المطلوب تحليل س^{٢} + ٣ س − ١٨

فهنا ا ب = − ١٨ ، ا + ب = ٣ فنبحث عن عددين حاصل ضربهما − ١٨ ومجموعهما ٣ وحيث ان حاصل ضربهما سالب فيكون أحد العددين موجبا والآخر سالبا وأزواج الاعداد التى حاصل ضربها − ١٨ هى ١ و − ١٨ ، − ١و١٨ ، ٢و− ٩ ، − ٢و٩ ، ٣و− ٦ ، − ٣و٦

وحيث ان مجموع — ٣ , ٦ هو ٣ فاذن يكون

س٢ + ٣ س — ١٨ = (س + ٦) (س — ٣)

وليتنبه الى أنه لا يمكن استعمال هذه الطريقة الا فى أحوال خصوصية

لانه فى مثل كثيرة الحدود س٢ + ٦ س + ٧ اذا أريد تطبيق القاعدة السابقة يلزم البحث عن عددين حاصل ضربهما ٧ ومجموعهما ٦ وحيث انه لم توجد أعداد صحيحة محققة لهذين الشرطين فلا يتأتى تحليل الكمية المذكورة الى عاملين بهذه الطريقة

(٨٣) القاعدة السادسة — يمكن تحليل المقدار الجبرى الى مضروبين أو أكثر بتكرار أخذ مضروب مشترك فى بعض حدوده

مثلا — فى المقدار س٢ — ح س + ب س — ح ب

يمكن أخذ س مضروبا مشتركا فى الحدين الاولين و ب مضروبا مشتركا فى الحدين الاخيرين ويكون س٢ — ح س + ب س — ح ب = س (س — ح) + ب (س — ح)

ثم يؤخذ س — ح مضروبا مشتركا فيحدث (س — ح) (س + ب)

مثال آخر ٦ س٢ — ٩ ح س + ٤ ب س — ٦ ح ب يوضع هكذا

(٦ س٢ — ٩ ح س) + (٤ ب س — ٦ ح ب) أو

٣ س (٢ س — ٣ ح) + ٢ ب (٢ س — ٣ ح) أو
(٢ س — ٣ ح) (٣ س + ٢ ب)
مثال آخر ح هـ + هـ ى — ل ح — ل ى نأخذ ح مضروبا مشتركا فى الحدود المشتملة عليه و ى مضروبا مشتركا كذلك فينتج ح هـ + هـ ى — ل ح — ل ى = ح (هـ — ل) + ى (هـ — ل) ثم نأخذ هـ — ل مضروبا مشتركا فى هذا المقدار فينتج
ح هـ + هـ ى — ل ح — ل ى = (ح + ى) (هـ — ل)
(٨٣) تنبيه ١ وهناك طرق أخرى تحليلية فى تحليل الكميات الى عوامل ولكنها ترجع فى الغالب الى ما تقدم
مثلا الكمية س٢ — ٤ س + ٣ يمكن كتابتها هكذا
س٢ — ٢ س + ١ — ٢ س + ٢ وهذه يمكن كتابتها هكذا
(س — ١)٢ — ٢ (س — ١) وبأخذ س — ١ مضروبا مشتركا يحدث
(س — ١) (س — ١ — ٢) أو (س — ١) (س — ٣)
(٨٤) تنبيه ٢ وبالقياس على ذلك يمكن تحليل مقدار جبرى مراعاة لقواعد نمرة ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣

تمارين

المطلوب ايجاد عوامل الكميات الآتية
(٨٦) ح٣ — ح س٢ ، س٣ — س٢ ح ، ٢ ح — ٢ ح٢
(٨٧) ح٢ — ح ب٢ ، ٧ هـ٢ + هـ ، ٨ س — ٢ س٢

(٨٨) ٦ س^{٣} − ٢ س^{٤} + ٤ س^{٥} ، س^{٢} − س^{٢} ص + س ص^{٢} ، ٢ س^{٢} ص^{٣} − ٦ س^{٢} ص^{٢} − ٢ س ص^{٣}

(٨٩) ٤ س^{٢} + ٤ س + ١ ، ٩ س^{٢} − ٦ س + ١ ، ٩ ح^{٤} − ٢٤ ح^{٢} ب^{٢} + ١٦ ب^{٤}

(٩٠) س^{٢} + س ص + $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} ، ٤ س^{٢} ح^{٢} + ٤ ح ب س ص + ب^{٢} ص^{٢}

(٩١) ٣ ح^{٢} + ٦ ح ب + ٣ ب^{٢} ، ح^{٣} − ٦ ح^{٢} ب + ٩ ح ب^{٢}

(٩٢) (ح + ب)^{٢} + ٤ هـ (ح + ب) + ٤ هـ^{٢} ، (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} − ٢ (س^{٢} + ص^{٢}) ع^{٢} + ع^{٤}

(٩٣) ح^{٢} − ٩ ، ١٦ − ب^{٢} ، ٢٥ ح^{٢} − ب^{٢} ، س^{٢} − ٩ ص^{٢}

(٩٤) ٦٤ ح^{٢} − ٤٩ ب^{٢} ، ٤ ح^{٢} − ٨١ ، ٤ س ص^{٢} − ٩ س^{٣} ، ٣ ح^{٥} − ١٠٨ ح^{٣} ، ٤ ح^{٢} + ٤ ح ب + ب^{٢} − ٩ هـ^{٢}

(٩٥) س^{٣} + ص^{٣} ، س^{٣} − ص^{٣} ، س^{٣} − ١ ، ١ + ح^{٣}

(٩٦) ح^{٣} − ٨ ب^{٣} ، ٨ ح^{٣} + ب^{٣} ، ٨ ح^{٣} − ١٢٥ س^{٣}

(٩٧) ح^{٣} − ١٢٥ س^{٦} ، ٤ ح^{٣} + ٣٢ ب^{٣} ، ٢ س ص^{٣} − $\frac{١}{٤}$ س^{٤}

(٩٨) س^{٢} + ٤ س + ٣ ، س^{٢} − ٤ س + ٣ ،
س^{٢} − ٦ س + ٨ .

(٩٩) س^{٢} − ٨ س + ١٥ ، س^{٢} − ١١ س + ١٨ ،
س^{٢} + ٩ س + ٢٠

(١٠٠) س^{٢} + ٢ س − ٣ ، س^{٢} + ٤ س − ٥ ، س^{٢}
+ س − ٦

(١٠١) ح^{٢} + ح ب + ح هـ + ب هـ ، ح^{٢} − ح هـ +
ح ب − ب هـ

(١٠٢) ح^{٢} هـ^{٢} + ح هـ ء − ح ب هـ + ب ء ، ح^{٢} +
٣ ح + ح هـ + ٣ هـ .

(١٠٣) ٢ س + هـ س + ٢ هـ + هـ^{٢} ، ح ب −
ب ص − ح ص + ص^{٢}

(١٠٤) ح^{٢} − ٢ ح س + س^{٢} − ٤ ب^{٢} ، ٩ ح^{٢} − هـ^{٢}
+ ٤ هـ س − ٤ س^{٢}

(١٠٥) ٢ ب ء − هـ^{٢} + ب^{٢} + ء^{٢} + ٢ ح هـ − ح^{٢} ،
٥ ح^{٢} ب^{٤} − ٧ ء^{٤} هـ^{٢} − ح^{٢} ن^{٤} − ٢ ء^{٤} هـ^{٢} .

الكسور الجبرية

(٨٥) تمهيد متى كان مقدار جبرى غير قابل للقسمة على مقدار جبرى آخر بين الخارج بكسر بسطه المقسوم ومقامه المقسوم عليه

فاذا كان المقدار $\text{٢٤ ح}^{٢}\text{ ء}^{٣}$ غير قابل للقسمة على $\text{ح}^{٣}\text{ هـ}$ يبين الخارج هكذا $\frac{\text{٢٤ ح}^{٢}\text{ ء}^{٣}}{\text{ح}^{٣}\text{ هـ}}$ ومن هنا يؤخذ التعريف الآتى

(٨٦) تعريف ـ الكسر الجبرى يدل على خارج قسمة بسطه على مقامه وكل من حدى الكسر الجبرى قد يكون كمية صحيحة أو كسرية موجبة أو سالبة

(٨٧) لا يتغير مقدار الكسر الجبرى بضرب حديه فى كمية واحدة ولا بقسمتهما على كمية واحدة فالكسر

$$\frac{\text{٢٥ ح}^{٢}\text{ ء}}{\text{٤٠ ح ء}^{٢}} = \frac{\text{٢٥ ح}^{٢}\text{ ء م}}{\text{٤٠ ح ء}^{٢}\text{ م}} = \frac{\text{٥ ح}}{\text{٨ ء}}$$

وينتج من ذلك أنه يمكن اختزال الكسر الجبرى وتجنيس الكسور بطرق مشابهة للطرق الحسابية

(٨٨) اختزال الكسر ـ نقسم حديه على كمية واحدة يقبلان القسمة عليها ونجعل الخارجين حدين للكسر الجديد

المثال الاول $\frac{\text{١٨ ح}^{٢}\text{ ء س}}{\text{٢٤ ح}^{٢}\text{ ء}^{٢}\text{ ص}} = \frac{\text{٣ س}}{\text{٤ ء ص}}$

المثال الثانى $\frac{\text{هـ (٤ ح}^{٢}\text{ − ء}^{٢}\text{)}}{\text{و (٤ ح}^{٢}\text{ + ٤ ح ء + ء}^{٢}\text{)}} = \frac{\text{هـ (٢ح − ء) (٢ح + ء)}}{\text{و (٢ح + ء) (٢ح + ء)}}$

$$= \frac{\text{هـ (٢ ح − ء)}}{\text{و (٢ ح + ء)}}$$

(٨٩) تجنيس الكسور ـ نضرب حدى كل كسر فى حاصل ضرب مقامات الكسور الاخر

المثال الاول $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} \text{ ، } \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{ح و}}{\text{ء و}} \text{ ، } \frac{\text{هـ ء}}{\text{و ء}}$

المثال الثانى $\frac{\text{١}}{\text{ب}} \text{ ، } \frac{\text{ح}}{\text{ء}} \text{ ، } \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{\text{ء ن}}{\text{ب ء ن}} \text{ ، } \frac{\text{ح ب ن}}{\text{ب ء ن}} \text{ ، } \frac{\text{م ب ء}}{\text{ب ء ن}}$

(٩٠) يمكن تجنيس الكسور بالبحث عن المضاعف البسيط لمقاماتها وضرب حدى كل كسر فى خارج قسمة المضاعف البسيط على مقامه

ولايجاد المضاعف البسيط لجملة حدود تحلل مكرراتها العددية الى عوامل أولية ثم تؤخذ جميع العوامل الرقمية والحرفية والمشترك يؤخذ باعلى آس فحاصل ضربها هو المضاعف البسيط فلتجنيس الكسور $\frac{ا}{١٢\,ح^{٢}\,د^{٣}}$ ، $\frac{ب}{٨\,ح\,ه}$ ، $\frac{ه}{٩\,د\,ه}$

نبحث عن المضاعف البسيط لمقاماتها فنجده ٧٢ $ح^{٢}\,د^{٣}$ ه ثم نقسمه على جميع المقامات تحدث الخوارج ٦ ه ، ٩ ح $د^{٣}$ ، ٨ $ح^{٢}$ $د^{٢}$ ثم نضرب حدى كل كسر فى الخارج المناظر له فيحدث $\frac{٦\,ا\,ه}{٧٢\,ح^{٢}\,د^{٣}\,ه}$ ، $\frac{٩\,ب\,ح\,د^{٣}}{٧٢\,ح^{٢}\,د^{٣}\,ه}$ ، $\frac{٨\,ح^{٣}\,د^{٢}}{١٢\,ح^{٢}\,د^{٣}\,ه}$

جمع الكسور

(٩١) قاعدة ــ لجمع الكسور يلزم تجنيسها اذا كانت المقامات مختلفة ثم نجمع البسوط ونجعل المجموع بسطا على المقام المشترك

(مثال ١) $\frac{ا}{ح} + \frac{د}{ح} + \frac{ه}{ح} = \frac{ا+د+ه}{ح}$

(مثال ٢) $\frac{ا}{ح} + \frac{ب}{د} + \frac{ه}{و} = \frac{ا\,د\,و}{ح\,د\,و} + \frac{ب\,ح\,و}{ح\,د\,و} + \frac{ه\,ح\,د}{ح\,د\,و} = \frac{ا\,د\,و + ب\,ح\,و + ه\,ح\,د}{ح\,د\,و}$

طرح الكسور

(٩٢) قاعدة ــ لطرح كسر من آخر يلزم تجنيسهما اذا كان

المقامان مختلفين ثم نطرح بسط كسر المطروح من بسط كسر المطروح منه ونجعل الناتج بسطا على المقام المشترك

(مثال ١) $\frac{\text{ج}}{\text{د}} - \frac{\text{هـ}}{\text{د}} = \frac{\text{ج} - \text{هـ}}{\text{د}}$

(مثال ٢) $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \left(-\frac{\text{هـ}}{\text{د}}\right) = \frac{\text{ا د}}{\text{ب د}} - \left(-\frac{\text{هـ ب}}{\text{ب د}}\right) = \frac{\text{ا د} + \text{هـ ب}}{\text{ب د}}$

ضرب الكسور

(٨٧) قاعدة ـ لضرب كسر فى كسر نضرب البسط فى البسط والمقام فى المقام ونجعل حاصل ضرب البسطين بسطا وحاصل ضرب المقامين مقاما

مثلا $\frac{\text{ج}}{\text{د}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{ج هـ}}{\text{د و}}$ ، $\frac{\text{ج}}{\text{د}} \times -\frac{\text{هـ}}{\text{و}} = -\frac{\text{ج هـ}}{\text{د و}}$ أو $\frac{-\text{ج هـ}}{\text{د و}}$ أو $\frac{\text{ج هـ}}{-\text{د و}}$

قسمة الكسور

(٨٨) قاعدة ـ لقسمة كسر على كسر يضرب كسر المقسوم فى عكس كسر المقسوم عليه

مثلا $\frac{\text{ج}}{\text{د}} : \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} \times \frac{\text{و}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ج و}}{\text{د هـ}}$ ، $-\frac{\text{ج}}{\text{د}} : \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = -\frac{\text{ج و}}{\text{د هـ}}$ أو $\frac{-\text{ج و}}{\text{و هـ}}$ أو $\frac{\text{ج و}}{-\text{و هـ}}$

(٨٩) تنبيه ـ يؤخذ مما تقدم أن كل كسر مسبوق بعلامة ناقص يمكن اعتبار انه سالب أو ان بسطه سالب ومقامه موجب أو بالعكس

تمارين

(١٠٦) اختصر الكسور $\frac{٧٢ ا ب^{٢} حـ^{٣}}{٨٤ ب^{٣} حـ^{٢} ء}$ ، $\frac{٣٩ حـ^{٢} ء^{٣} ب}{٩١ ب حـ^{٣} ء^{٢}}$ ،
$\frac{٥ حـ^{٢} ء^{٢} هـ}{١٥ حـ^{٢} ء^{٢} هـ^{٣}}$ ، $\frac{حـ + ب}{حـ^{٢} - ب^{٢}}$ ، $\frac{حـ^{٢} + ٢ حـ ء + ء^{٢}}{حـ^{٢} - ء^{٢}}$ ، $\frac{٢٥ حـ^{٢} - ١}{٥ حـ + ١}$

(١٠٧) اجمع $\frac{١}{ب} + \frac{حـ}{ء} + \frac{هـ}{و}$ ثم اجمع $\frac{١}{١ + ب} +$
$\frac{ب}{ب^{٢} - ا^{٢}} + \frac{ب}{١ - ب}$

(١٠٨) اطرح $\frac{حـ}{ء}$ من $\frac{حـ^{٢}}{٣ ء}$ ، $\frac{١٢ ب}{٦ حـ ء}$ من $\frac{١٥ ب}{٦ حـ ء}$ ، $\frac{١}{٣ هـ}$
من $\frac{١٢ حـ^{٢}}{١٨ هـ^{٢}}$

(١٠٩) اضرب $\frac{حـ}{ء} \times \frac{هـ}{و}$ ، $\frac{١}{ب} \times \frac{- حـ}{ء}$ ،
$ء \times - \frac{٣ هـ}{ء و}$ ، $\frac{٢ حـ ء}{هـ^{٣} و} \times ا هـ$.

(١١٠) اقسم $\frac{حـ^{٣} ء^{٢}}{هـ و} : \frac{حـ}{و}$ ، $٣ حـ : \frac{١}{ب}$ ، $\frac{٣ هـ}{و} : ٣ حـ$
، $- \frac{١}{ب} : - ٢ ء$

المطلوب تحويل الاوضاع الآتيـة الى أوضاع مختصرة

(١١١) $حـ - \frac{١}{١ + \frac{١}{حـ}}$ ، $حـ + \frac{١}{\frac{١}{حـ} + \frac{١}{ب}}$ ، $\frac{\frac{ب}{حـ} + \frac{ء}{ا}}{١ - \frac{ب ء}{ا حـ}}$

(١١٢) $\frac{٣ حـ + \frac{٧ ب}{٨ هـ}}{٣ هـ + \frac{٧ ب}{٨ حـ}}$ ، $\frac{٢ + \frac{٣ حـ}{٤ ب}}{حـ + \frac{٨ ب}{٣}}$ ، $\frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{ص}}{\frac{١}{س} - \frac{١}{ص}}$

$$(١١٣)\quad \left(\frac{ح^٢ - ح س + س^٢}{ح - س} - \frac{ح^٢ + ح س + س^٢}{ح + س}\right) \div \frac{س^٣}{ح^٢ - س^٢}$$

$$،\quad \frac{س - س^{-١}}{١ + س^{-١}}$$

$$(١١٤)\quad \frac{١}{س + ص} \div \left[\frac{ص}{٢}\left(\frac{١}{س + ص} + \frac{١}{س - ص}\right) \times \frac{س^٢ - ص^٢}{س^٢ ص + س ص^٢}\right]$$

$$،\quad \frac{\frac{ح}{ب} + \frac{هـ}{د}}{\frac{ح}{ب} - \frac{هـ}{د}}$$

$$(١١٥)\quad \frac{٩ س^٢ - ٦٤}{س - ١ - \frac{١}{١ - \frac{س}{٤ + س}}}$$

$$،\quad \frac{\frac{١}{س} - \frac{س + ح}{س^٢ + ح}}{\frac{١}{ح} - \frac{س + ح}{س^٢ + ح}} + \frac{\frac{١}{س} - \frac{س - ح}{س^٢ + ح^٢}}{\frac{١}{ح} - \frac{ح - س}{س^٢ + ح^٢}}$$

المعادلات ذات الدرجة الاولى

تعاريف

(٩٠) المتساوية ـ هى اجتماع كيتين متساويتين مفصولتين بعلامة التساوى

مثل $١ + ب = ٢ ح$

وما قبل علامة التساوى يسمى الطرف الاول وما بعدها يسمى الطرف الثانى

(٩١) المتطابقة ـ هى متساويه ظاهر تساويها

مثل ١٢ = ١٢ و ٥ + ٤ = ٤ + ٥

ويطلق اسم متطابقة على التساوى بين وضعين جبريين بحيث اذا أعطى للحروف الداخلة فيهما مقادير متحدة لايزال التساوى باقيامهما كانت هذه المقادير

مثل (ح + ء)٢ = ح٢ + ٢ ح ء + ء٢

(٩٢) المعادلة هى متساوية لايتحقق تساويها الا باستبدال المجاهيل الداخلة فيها بمقادير خصوصية

مثل ٥ س — ١ = ١٩

فانه لايتحقق تساويها الا اذا جعل س = ٤ لانه بذلك تصير

٥ × ٤ — ١ = ١٩ أى ١٩ = ١٩

(٩٣) أنواع المعادلة ـ المعادلة نوعان رقيـة وحرفية فالمعادلة الرقيـة هى ما كانت المقادير المعلومة فيها مبينة بأرقام والمعادلة الحرفيـة ما كانت المقادير المعلومـة فيها مبينة بحروف

فالمعادلة ٥ س — ١ = ١٩ رقية والمعادلة ٥ س — ح = ء حرفية

(٩٤) حـل المعادلة ـ هو البحث عن عـدد اذا وضـع بدل المجهول يجعلها متطابقـة وهـذا العـدد يسمى جـذر المعـادلة

فالمعادلة ٥ س — ١ = ١٩ جذرها ٤

(٩٥) درجة المعادلة ـ هى أعظم درجات حدودها بالنسـبة للمجاهيل الداخلة فيها

فالمعادلة ٥ س — ١ = ١٩ من الدرجة الاولى والمعادلة ح س٢ + ب س = ء من الدرجة الثانية

والمعادلة ٤ س ص — ٣ س = ٢ — ٥ ص من الدرجة الثانية

قواعد أساسية

(٩٦) قاعدة لا يتغير جذر المعادلة اذا ضم أو طرح من طرفيها عدد واحد

فالمعادلة ٥ س — ١ = ١٩ جذرها ٤ واذا أضيف الى طرفيها ٢ يحدث

٥ س + ١ = ٢١ وجذر هذه المعادلة هو ٤ أيضا

واذا طرح من طرفيها ٢ يحدث

٥ س — ٣ = ١٧ وجذر هذه المعادلة هو ٤ أيضا

(٩٧) ينتج من هذه القاعدة أوّلا أنه لتحويل حد من طرف لطرف يلزم تغير اشارته لانه اذا كان الحد المذكور موجبا كان تحويله من طرف لطرف عبارة عن طرحه من الطرفين وان كان سالبا كان تحويله عبارة عن اضافته للطرفين

ففي المعادلة ٥ س — ١ = ١٩ يمكن تحويل — ١ الى الطرف الثاني وتصير ٥ س = ١٩ + ١

ثانيا لا تتغير المعادلة بتغير اشارات جميع حدودها

فالمعادلة ٥ س — ١ = ١٩ تكافئ — ٥ س + ١ = — ١٩

ثالثا يمكن تحويل جميع حدود المعادلة الى طرف واحد وجعل الطرف الثاني صفرا

(٩٨) قاعدة لا يتغير جذر المعادلة اذا ضرب طرفاها في مقدار واحد أو قسما على مقدار واحد

فالمعادلة $\frac{٢\text{س}}{٥} + ٨ = \frac{\text{س}}{٣} + ٩$ جذرها ١٥

واذا ضرب طرفاها فى ٣ ينتج

$\frac{٢\text{س}}{٥} \times ٣ + ٨ \times ٣ = \frac{\text{س}}{٣} \times ٣ + ٩ \times ٣$ أو

$\frac{٦\text{س}}{٥} + ٢٤ = \text{س} + ٢٧$ وجذر هذه المعادلة هو ١٥ أيضا

واذا قسم طرفاها على ٢ ينتج

$\frac{٢\text{س}}{١٠} + \frac{٨}{٢} = \frac{\text{س}}{٦} + \frac{٩}{٢}$ او

$\frac{\text{س}}{٥} + ٤ = \frac{\text{س}}{٦} + ٤٫٥$ وجذر هذه المعادلة هو ١٥ أيضا

(٩٩) تنبيه يشترط أن لايكون المقدار الرقى للمضروب فيه معدوما لانه بذلك يدخل فى المعادلة حلول غريبة (أى مقادير تحقق المعادلة الجديدة ولا تحقق المعادلة الاصلية) ويتأتى ذلك اذا كانت كمية المضروب فيه محتوية على المجهول

مثلا فى المعادلة $٣ - \text{س} = ١٥ - ٢\text{س}$ (١) التى جذرها ١٢ اذا ضرب طرفاها فى $\text{س} - ١$ يحدث

$(٣ - \text{س})(\text{س} - ١) = (١٥ - ٢\text{س})(\text{س} - ١)$ [١]

وهذه المعادلة تتحقق أولا بجعل $\text{س} = ١٢$ وبجعل $\text{س} = ١$

والمقدار الثانى نشأ من ضرب المعادلة فى $\text{س} - ١$ اذ بفرضه مساويا لصفر يكون $(\text{س} - ١) = ٠$ ومنه $\text{س} = ١$

وحيث ان هذا المقدار تحل به المعادلة (٢) دون المعادلة (١) فهو حل غريب

ومن هنا ينتج أنه اذا ضرب طرفا المعادلة فى كمية مشتملة على المجهول لزم تسوية هذه الكمية بصفر والبحث عن حلول هذه المعادلة فما كان منها محققا للمعادلة الحادثة من الضرب ولا يحقق المعادلة الاصلية يكون حلا غريبا ينبغى حذفه

(١٠٠) حذف مقامات معادلة — ينتج مما تقدم أنه لحذف مقامات معادلة تضرب جميع حدودها فى المقام المشترك للكسور الداخلة فيها

مثال ١ لحذف مقامات المعادلة $\frac{٢س}{٥} + ٨ = \frac{س}{٣} + ٩$

نجنس الكسور الداخلة فيها فينتج $\frac{٦س}{١٥} + ٨ = \frac{٥س}{١٥} + ٩$

ثم تضرب طرفى المعادلة فى المقام المشترك ١٥ فينتج ٦ س + ١٢٠ = ٥ س + ١٣٥

مثال ٢ لحذف مقامات المعادلة $\frac{٣س}{١٥} + ٧ = \frac{٤س}{١٢} + \frac{١٩}{٣}$ نجنس الكسور الداخلة فيها ولذلك نبحث عن المضاعف البسيط للمقامات فنجده ٦٠ وينتج

$\frac{١٢س}{٦٠} + ٧ = \frac{٢٠س}{٦٠} + \frac{٣٨٠}{٦٠}$ ثم تضرب طرفى المعادلة فى ٦٠ فينتج

١٢ س + ٤٢٠ = ٢٠ س + ٣٨٠

ومن هنا يؤخذ أنه لحذف مقامات معادلة يكفى أن يضرب بسط كل حد كسرى فى خارج قسمة المضاعف البسيط للمقامات على مقامه وكل حد صحيح فى المضاعف البسيط لها

(حل المعادلات ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد)

(١٠١) قاعدة ـ لحل معادلة بدرجة أولى ومجهول واحد يلزم أولا حذف المقامات والاقواس ان وجدت ـ ثانيا تحويل الحدود المشتملة على المجهول الى طرف والحدود المشتملة على المعاليم الى طرف آخر ـ ثالثا اختصار الحدود المشتملة على المجهول الى حد واحد ان كانت المعادلة رقمية أو أخذ المجهول مضروبا مشتركا ان كانت المعادلة حرفية ـ رابعا قسمة الطرفين على مكرر المجهول

مثال ١ ليكن المطلوب حل المعادلة

$٥\text{س} - ١ = ١٩$ تحول -١ الى الطرف الثانى فيحدث

$٥\text{س} = ٢٠$ ثم نقسم الطرفين على مكرر المجهول وهو ٥

فينتج $\text{س} = ٤$

مثال ٢ ليكن المطلوب حل المعادلة

$\frac{٢\text{س}}{٥} + ٨ = \frac{\text{س}}{٣} + ٩$ تحذف المقامات فيحدث

$٦\text{س} + ١٢٠ = ٥\text{س} + ١٣٥$ ثم تحول ٥س الى الطرف الاول و ١٢٠ الى الثانى فيحدث

$٦\text{س} - ٥\text{س} = ١٣٥ - ١٢٠$ أو

$\text{س} = ١٥$

المثال الثالث ليكن المطلوب حل المعادلة

$\frac{٧(\text{س} - ٢)}{٤} + ٣ = \frac{٥(\text{س} + ٢)}{٨} + ٥$ تحذف المقامات فيحدث

$١٤(\text{س} - ٢) + ٢٤ = ٥(\text{س} + ٢) + ٤٠$

ثم بحذف الاقواس يحدث

١٤ س — ٢٨ + ٢٤ = ٥ س + ١٠ + ٤٠ وبالتحويل يحدث

١٤ س — ٥ س = ١٠ + ٤٠ + ٢٨ — ٢٤ وبالاختصار يحدث ٩ س = ٥٤ أو

س = ٦

المثال الرابع ليكن المطلوب حل المعادلة

$\frac{\text{س}}{\text{ب}}$ = ح — $\frac{\text{س}}{\text{ا}}$ بحذف المقامات فيحدث

ا س = ا ب ح — ب س وبالتحويل يحدث

ا س + ب س = ا ب ح نأخذ س مضروبا مشتركا فيحدث

(ا + ب) س = ا ب ح ثم نقسم الطرفين على ا + ب

فيحدث س = $\frac{\text{ا ب ح}}{\text{ا} + \text{ب}}$

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

(١١٦) ٣ س — ٢٨ = ٣٥

(١١٧) ٦ س — ١٢ = ٤٨ — ٤ س

(١١٨) ١٢ — ٣ (س — ٢) = ٢ (س + ٤) — ١٥

(١١٩) ١٥ — [(٤ س + ٢) — ٤ (١ — س)] = ١

(١٢٠) ١٢ س — ٣٨ = $\frac{\text{٥ س} - \text{٢}}{\text{٣}}$ + ٤

(١٢١) $\frac{٥س}{٣} + \frac{٣س}{٤} - ٣٦,٢٥ = ٠$

(١٢٢) $\frac{س}{٥} - \frac{س}{٢} + \frac{٤س}{٣} = ١٥,٥$

(١٢٣) $\frac{٥س}{١٢} + \frac{٧س + ١٨}{١٥} - \frac{١١س - ١٦}{٢٠} = ٤$

(١٢٤) $\frac{٣س - ٤}{١٤} + \frac{٥س - ١٦}{١٢} - \frac{س}{١٠} = ٩$

(١٢٥) $\frac{٢س - ٣}{٤س - ٥} = \frac{٣}{٧}$

(١٢٦) $\frac{٧س - \frac{١}{٣}}{٩س - \frac{٣}{٤}} = \frac{٨}{٩}$

(١٢٧) $\frac{٣}{س - ١} = \frac{١٢}{٣س - ٢}$

(١٢٨) $ب س - ح = ء$

(١٢٩) $ب س - ح س = ب^{٢} - ح^{٢}$

(١٣٠) $\frac{س}{ب} + \frac{س}{ح} = ١$

(١٣١) $\frac{س}{ب} + \frac{س}{ح} - \frac{س}{ء} = ١$

(١٣٢) $\frac{ب س - ح}{ء} = ح س$

(١٣٣) $\frac{ب س - ح س}{ب + ح} = ب - ح$

(١٣٤) $\frac{ب + ح}{س} = \frac{١}{ب^{٢} - ب ح + ح^{٢}}$

(١٣٥) $(س + ب)(س + ح) - ح(ب + ح) = س^{٢} + \frac{٢ ح ء}{ب}$

حل المسائل بواسطة علم الجبر

(١٠٢) تمهيد لحل مسئلة بواسطة علم الجبر يلزم أولا وضعها على صورة معادلة أو عدة معادلات ثانيا حل هذه

المعادلة أو المعادلات

أما وضع المسئلة على صورة معادلة أو أكثر فلا يقع تحت قاعدة وانما بكثرة التمرين يتيسر للطالب وضع المسائل على هيئة معادلات ومع ذلك فنذكر بعض ملحوظات للاستعانة بها فى مبدأ الامر فنقول

يستبدل المجهول أو المجاهيل الداخلة فى المسئلة بحرف أو حروف ثم يتأمل جيدا فى منطوق المسئلة للبحث عن الارتباطات التى بين المجهول أو المجاهيل والكميات المعلومة وتبين هذه الارتباطات بالعلامات الجبرية فبذلك يتوصل الى تكوين معادلة أو معادلات

وتتميز المسائل أولا بعدد مجاهيلها ثانيا بدرجة المعادلات التى تستعمل لحلها ثم اذا كانت المسئلة لاتحتاج الا الى معادلة واحدة ذات مجهول واحد وكانت درجتها بالنسبة لذلك المجهول هى الدرجة الاولى سميت المعادلة ذات درجة أولى ومجهول واحد وأما حل المعادلة (اذا كانت بدرجة أولى ومجهول واحد) فقد سبق الكلام عليه بنمرة (١٠١) واذا كان غير ذلك فسيأتى الكلام عليه

حل مسائل ذات درجة أولى ومجهول واحد

(١٠٣) المسئلة الاولى — ماهو العدد الذى اذا أضيف الى ثلثه خمسة والى خمسه ثلاثة كان مجموع ذلك مساويا لثلثى هذا العدد

الحل اذا رمز بحرف س للعدد المطلوب كان ثلثه مضافا اليه ٥ هو $\frac{س}{٣} + ٥$ وخمسه مضافا اليه ٣ هو $\frac{س}{٥} + ٣$ وحيث ان مجموع هذين المقدارين يلزم أن يكون مساويا لثلثى هذا العدد أى للمقدار $\frac{٢س}{٣}$ تحدث المعادلة

$$\frac{س}{٣} + ٥ + \frac{س}{٥} + ٣ = \frac{٢س}{٣}$$

وبحلها يحدث س = ٦٠

(١٠٤) المسئلة الثانية — تلميذ فرق تفاحا على ثلاثة من رفقائه فأعطى الاول $\frac{٢}{٩}$ التفاح زائدا تفاحة وثلثا وأعطى الثانى $\frac{٣}{٧}$ التفاح ناقصا تفاحة وسبعا وأعطى الثالث الباقى وبذلك كانت أنصبتهم متساوية فكم كان عدد التفاح

الجواب نفرض أن عدد التفاح س فيكون ما أعطاه الاول هو $\frac{٢س}{٩} + ١\frac{١}{٣}$ وما أعطاه للثانى هو $\frac{٣س}{٧} - ١\frac{١}{٧}$ وحيث أن الانصبة متساوية فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{٢س}{٩} + ١\frac{١}{٣} = \frac{٣س}{٧} - ١\frac{١}{٧}$$

ولحلها يحول كل عدد صحيح وكسر الى عددى كسرى فينتج

$\frac{٢س}{٩} + \frac{٤}{٣} = \frac{٣س}{٧} - \frac{٨}{٧}$ ثم تضرب الطرفين فى ٦٣ فيحدث

$$١٤ س + ٨٤ = ٢٧ س - ٧٢$$ وبالتحويل يحدث

$$١٤ س - ٢٧ س = - ٧٢ - ٨٤$$ أو

$$- ١٣ س = - ١٥٦$$ وبتغيير اشارتى الطرفين يحدث

$$١٣ س = ١٥٦$$ أو

س = ١٢

التحقيق ــ أن ما أخذه الاول $\frac{٢}{٩}$ × ١٢ + $\frac{١}{٣}$ ١ = ٤
وما أخذه الثانى هو $\frac{٣}{٧}$ × ١٢ − $\frac{١}{٧}$ ١ أى ٤ وما أخذه
الثالث هو الباقى أى ٤ تفاحات

(١٠٥) المسئلة الثالثة ــ حنفية تملأ حوضا فى زمن د
ساعة وأخرى تملؤه فى دَ ساعة فما مقدار الزمن الذى يملأ فيه
هذا الحوض اذا سلطت عليه الحنفيتان فى آن واحد

الحل ترمز للزمن المطلوب بحرف س ثم يقال حيث ان الحنفية
الاولى تملؤه فى د ساعة فتملأ فى الساعة $\frac{١}{د}$ منه وتملأ فى
الزمن س المقدار $\frac{١}{د}$ × س أى $\frac{س}{د}$ من الحوض وبمثل ذلك
تملأ الحنفية الثانية فى الزمن س المقدار $\frac{س}{دَ}$ وحيث ان مجموع
هذين المقدارين يلزم أن يكون مساويا للحوض فتحدث المعادلة

$$\frac{س}{د} + \frac{س}{دَ} = ١$$

ولحلها تحذف المقام فيحدث دَ س + د س = د دَ
وبأخذ س مضروبا مشتركا يحدث
(دَ + د) س = د دَ وبقسمة الطرفين على دَ + د
يحدث

$$س = \frac{د\ دَ}{دَ + د}$$

أعنى أن الزمن المطلوب يساوى حاصل ضرب الزمنين المعلومين
مقسوما على مجموعهما

تنبيه الناتج المــذكور يسمى قانونا جبريا اذ به تحل جميع المسائل المشابهــة لهذه المسئلة التى لا تختلف عن بعضها الا فى المقادير العــددية وهذا من فوائد ومزايا علم الجبر فاذا فرض أن حوضا تملأه حنفية فى مدة ٥ ساعات وأخرى فى ٣ ساعات وأريد معرفة الزمن الذى تملأ فيــه هذا الحوض بالحنفيتين معا يكفى أن نضع فى القانون السابق بدلا عن ن و نَ العددين ٥ و ٣ فيحدث

$$س = \frac{٥ \times ٣}{٥ + ٣} = \frac{١٥}{٨} = ١ \frac{٧}{٨} \text{ ساعة}$$

(١٠٦) المسئلة الرابعة ماهو العدد اللازم اضافته الى حدى الكسر $\frac{ح}{د}$ ليكون الناتج مساويا للكسر $\frac{م}{ن}$

الحــل نرمز لهذا العدد بحرف س فعلى حسب منطوق المسئلة تحدث المعادلة $\frac{ح + س}{د + س} = \frac{م}{ن}$

وحلها بحذف المقام فيحدث

$$ح ن + س ن = م د + م س$$

وبالتحــويل وأخــذ س مضروبا مشتركا يحدث

$$(ن - م) س = م د - ح ن$$

وبقسمــة الطرفــين عــلى مكرر المجهول ينتج

$$س = \frac{م د - ح ن}{ن - م}$$

أعــنى يضرب بســط الكسر الجــديد فى مقام الكسر الاصــلى ويطرح من الحاصل حاصل ضرب بسط الكسر الاصلى فى مقام الكسر الجديد ويقسم الباقى على الفرق بين مقام وبسط الكسر الجديد وهذا قانون عام تحل بواسطته جميع المسائل المشابهة لهذه

المسئلة التى لا يختلف بعضها عن بعض الا فى المقادير العددية
وهذا من مزايا علم الجبر

فاذا فرض أن $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{٥}{٧}$ ، $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٤}{٥}$ تكون الكمية
المطلوبة هى $\frac{٤\times٧ - ٥\times٥}{٥ - ٤} = \frac{٢٨ - ٢٥}{١} = ٣$ والتحقيق واضح
واذا فرض أن $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{١}{٢}$ تكون الكمية
المطلوبة هى $\frac{١\times٤ - ١\times٢}{٢ - ١} = ٢$

(١٠٧) المسئلة الخامسة ـ تصدق شخص بمبلغ على جملة فقراء فأعطى الفقير الاول قرشا واحدا وخمس الباقى معه ثم أعطى الفقير الثانى قرشين وخمس الباقى بعد ذلك وأعطى الثالث ثلاثة قروش وخمس الباقى بعد ذلك وهكذا وبذلك كانت الانصبة متساوية فكم كان المبلغ وكم عدد الفقراء

الحل ـ نفرض أن المبلغ س وحيث انه أعطى الفقير الاول قرشا فالباقى بعد ذلك $\text{س} - ١$ وحيث انه اعطاه أيضا خمس الباقى أى $\frac{\text{س} - ١}{٥}$ فيكون جملة ما أخذه الفقير الاول هو $١ + \frac{\text{س} - ١}{٥} = \frac{\text{س} - ٤}{٥}$ (١)

وبطرحه من المبلغ الاصلى يكون الباقى هو $\text{س} - \frac{\text{س} + ٤}{٥} = \frac{٤\text{س} - ٤}{٥}$

وحيث انه أعطى الفقير الثانى أولا قرشين يكون الباقى بعد ذلك هو $\frac{٤\text{س} - ٤}{٥} - ٢ = \frac{٤\text{س} - ١٤}{٥}$ وحيث انه أعطاه أيضا خمس هذا الباقى أى $\frac{٤\text{س} - ١٤}{٢٥}$ فيكون ما أخذه الفقير الثانى هو $٢ + \frac{٤\text{س} - ١٤}{٢٥} = \frac{٤\text{س} + ٣٦}{٢٥}$ (٢)

وحيث ان الانصبة متساوية يكون نصيب الاول المبين بنمرة (١) يساوى نصيب الثانى المبين بنمرة (٢) أى

$$\frac{\text{س} + ٤}{٥} = \frac{٤\text{س} + ٣٦}{٢٥}$$

ولحلها بحذف المقام بضرب الطرفين فى ٢٥ فينتج

٥ س + ٢٠ = ٤ س + ٣٦ أو

٥ س − ٤ س = ٣٦ − ٢٠ ومنه

س = ١٦

أعنى أن المبلغ $\frac{\text{ج}}{١٦}$ ونصيب الاول هو ١ + $\frac{١٥}{٥}$ = ٤ وحيث ان الانصبة متساوية فيكون عدد الفقراء هو $\frac{١٦}{٤}$ = ٤

التحقيق — قد علم أن نصيب الاول $\frac{\text{ج}}{٤}$ فالباقى بعد نصيبه هو $\frac{\text{ج}}{١٢}$ ونصيب الفقير الثانى هو ٢ + $\frac{١٠}{٥}$ = ٤ والباقى بعد ذلك $\frac{\text{ج}}{٨}$ ونصيب الثالث هو ٣ + $\frac{٥}{٥}$ = ٤ والباقى ٤ هو نصيب الرابع

مسائل بدرجة أولى ومجهول واحد يطلب حلها

(١٣٦) اقسم $\frac{\text{ج}}{١٥٠}$ بين شخصين بحيث ان نصف نصيب الاول يساوى ضعف نصيب الثانى

(١٣٧) اقسم ٧٢ فدانا بين شخصين بحيث يكون نصيب أحدهما نصف نصيب الآخر

(١٣٨) اقسم ٢٤٠ جنيها بين ثلاثة أشخاص بحيث يأخذ الاول ضعف ما يأخذه الثانى وأن يأخذ الثالث ٣ أمثال ما يأخذه الثانى

(١٣٩) تصدق شخص بمبلغ على اول فقير قابله ثم بمقدار $\frac{٣}{٤}$ هذا المبلغ على فقير آخر ثم بثلثى ما أخذه الثانى على فقير ثالث ثم بنصف ماأخذه الفقير الثالث على فقير رابع فبلغ مقدار ما تصدق به على الفقراء الاربعة ٥٠ مليما فما مقدار ماأخذه كل منهم

(١٤٠) ثلاثة قطع قماش مقدارها ١٠٠ ذراع ولكن الثانية تزيد عن الاولى $\frac{١}{٢}$ ١٥ ذراعا والثالثة تنقص عن الاولى $\frac{١}{٢}$ ٥ أذرع فما طول كل قطعة

(١٤١) المطلوب تقسيم ٩٩ نخلة بين خمسة أشخاص بحيث ان الاول يأخذ زيادة عن الثانى ثلاثة وأقل من الثالث بعشرة وأزيد من الرابع بتسعة وأقل من الخامس بستة عشر

(١٤٢) أربع قطع من الحرير متساوية فى الطول بيع من كل من قطعتين منها ١٩ مترا وبيع من كل من القطعتين الأخريين ١٥ مترا ثم قيست القطع الباقية فوجد أنها ٧٦ مترا فما كان طول كل قطعة من القطع الاصلية

(١٤٣) زيد باع ٣٩ رأسا من غنمه وعمرو باع ٩٣ رأسا من غنمه فوجد أن ما بقى عند زيد ضعف مابقى عند عمرو فمن بعد معرفة أن أغنامهما الاصلية متحدة العدد يراد معرفة مقدار ما كان عند كل منهما

(١٤٤) اشتغل زيد وعبيد فى التجارة وكان رأس مال أحدهما كرأس مال الآخر ففى السنة الاولى ربح زيد ٤٠ جنيها وخسر

عبيد ٤٠ جنيها ولكن فى السنة الثانية خسر زيد ثلث ما كان عنده فى السنة الاولى وربح عبيد ضعف ماخسره زيد ناقصا ٤٠ جنيها فوجد مال عبيد ضعف مال زيد والمطلوب معرفة رأس مال كل منهما

(١٤٥) ملئ آناء ان زيتا وكان سعة أحدهما ثلاثة أمثال سعة الآخر ثم أخذ ٤ أرطال من كل منهما فوجد أن مابقى فى الاناء الكبير يعادل ٤ أمثال ما بقى فى الاناء الصغير فما سعة كل منهما

(١٤٦) استأجر جماعة سفينة على حساب ٦٠ فرنكا عن كل شخص ولكن اتفقوا مع الملاح انهاذا زاد عليهم أشخاص آخرون يلزم أن ينقص من مجموع أجرتهم ٣٠ فرنكا فى مقابلة كل شخص فاتفق أن نزل بالسفينة أشخاص تزيد عن ربع الاول بمقدار ٣ أشخاص ولهذا دفع كل من الاشخاص الاول خمسين فرنكا فقط والمطلوب معرفة عدد الاشخاص الاول

(١٤٧) يراد شراء ورق طوابع بوستة بمبلغ ٢١٠ مليمات بحيث يكون جزء منه مما ثمنه ١٠ مليمات وضعف هذا العدد مما ثمنه ٥ مليمات وثلاثة أمثاله مما ثمنه ٣ مليمات وأربعة أمثاله مما ثمنه مليمان وخمسة أمثاله مما ثمنه مليم واحد فكم ورقة تؤخذ من كل نوع

(١٤٨) أب عمره ٤٠ سنة وعمر ابنه ١٠ سنين فبعد كم سنة

يصير عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن

(١٤٩) أب عمره ثمانيــة أمثــال عمر ابنه وفرق العمــرين يزيد بقدر ١٦ سنة عن ثلاثة أمثال عمر الابن فكم عمر كل منهما

(١٥٠) ماهو العــدد الذى اذا قسم بالتتابع على ٣ ثم عــلى ٥ كان مجموع الخارجين ٢٤

(١٥١) المسافة بــين القاهرة والاسـكندرية ٢٠٨ كيــلومتر وقام قطار من الاسكندرية الساعة ٩ افرنكى صباحا بسرعة ٦٠ كيلومتر فى الساعة فبعــد أى زمن يتقابل مع القطار الذى يقوم من القاهرة الساعة ٨ و ١٥ دقيقة افرنكى صباحا بسرعة ٤٥ كيلومــتر فى الساعة

(١٥٢) قطار سكة حــديد يقطع ٣٦ كيلومتر فى الساعــة قام من محطة الساعة $\frac{١}{٢}$ ٣ خلف قطار آخر قام قبله على الشريط نفسه وقطع ٨١ كيلومــتر فى ٣ ساعات والمطلوب تعيين المسافة التى يعدها القطار المتأخر يلحق السابق (ثم تحديد الساعة التى يلحقه فيها)

(١٥٣) شخص أوصى أن يقسم مــيراثه على أولاده بالكيفيــة الآتيــة وهى أن يعطى للاول ١٠٠٠ جنيــه وسـدس الباقى وللثانى ٢٠٠٠ جنيــه وسدس ما يبقى وللثــالث ٣٠٠٠ جنيه وســدس مايبقى وهكذا وبتنفيذ هذه الوصية وجــد أن الانصبة متساوية فكم كان الميراث وكم عدد الاولاد

(١٥٤) $\frac{٣}{٤}$ مبلغ مطروحا منــه $\frac{ص}{٣٦}$ تساوى $\frac{٣}{٧}$ هــذا المبلغ

مضافا اليه ح فما مقدار هذا المبلغ

(١٥٥) ثعلب سابق كلبا بقدر ٦٠ قفزة وهو يقفز ٩ قفزات عند ما يقفز الكلب ٦ قفزات الا أن كل ٣ قفزات من قفزات الكلب تعادل ٧ قفزات من قفزات الثعلب والمطلوب معرفة عدد القفزات التى يلزم أن يقفزها الكلب حتى يلحق الثعلب

حل مجموعة معادلتين بمجهولين ودرجة أولى

(١١٤) كل معادلة ذات مجهولين يمكن أن يكون لها حلول غير معينة

فالمعادلة ٥ س + ٢ ص = ٣٥ لها حلول غير معينة لانه اذا فرض أن س يساوى مقدارا اختياريا مثل ١ ينتج للمجهول ص مقدار مطابق له وهو ١٠ واذا فرض أن س = ٢ ينتج للمجهول ص مقدار مطابق له وهو $\frac{1}{2}$ ٨ وهكذا

فاذن لا تكفى معادلة واحدة لتعيين مقدارى مجهولين واذا لزم استخراج مقدارى مجهولين فيلزم وجود معادلتين مرتبطتين ببعضهما أى أن المقدارين المطلوبين يحققان كلا من المعادلتين واجتماع هاتين المعادلتين يسمى بمجموعة معادلتين

(١١٥) تنبيه يلاحظ عند الشروع فى حل مجموعة مركبة من معادلتين أو أكثر ما تقدم ذكره بنمرة ١٠١ من جهة حذف المقامات والاقواس من كل معادلة منها وتحويل الحدود المشتملة على المجاهيل الى أحد الطرفين والمشتملة على المعاليم الى الطرف الآخر

(١١٦) حالة خصوصية اذا كانت احدى المعادلتين لاتشتمل الا على مجهول واحد يستخرج منها مقداره مباشرة ثم يستبدل هذا المجهول فى المعادلة الثانيــة بالمقدار الناتج فتحدث معادلة تشتمل على المجهول الثانى فقط فيمكن استخراج مقداره منها

مثلا لحل المجموعة ٣ س — ٥ = ١٩ (١)

٢ س + ٣ ص = ٢٢ (٢)

نستخرج مقدار س من المعادلة الاولى فنجد أنه يساوى ٨ ثم نستبدل س فى المعادلة (٢) بمقداره وهو ٨ فينتج ١٦ + ٣ ص = ٢٢ وبحل هذه المعادلة ينتج أن ص = ٢

(١١٧) قاعدة عمومية ـ لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى وبمجهولين يحذف أحـد المجهولين من هـذه المجموعة فتنتج معادلة بدرجة أولى وبمجهول واحـد ومنها يستخرج مقدار هذا المجهول ثم يستبدل فى احدى المعادلتين المفروضتين بمقـداره فتنتج معادلة مشتملة على المجهول الثانى فقط فيستخرج مقداره منها

(١١٨) ولحـذف مجهول من مجموعة معادلتـين ثلاث طرق ـ الاولى طريقة الحذف بالوضع ـ الثانية طريقة الحذف بالمقارنة ـ الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أوالطرح

وسنتكلم على حل مجموعة معادلتين بمجهولين بمقتضى قاعدة (١١١) مع استعمال الطرق المذكورة فى الحذف فنقول

الحذف بالوضع

(١١٩) قاعدة ـ يستخرج مقدار أحد المجهولين من احدى

المعادلتين بفرض ان الآخر معلوم ثم يوضع هذا المقدار فى المعادلة الثانية

مثلا ــ ليكن المطلوب حل المجموعة ٥ س + ٣ ص = ٢٩ (١)

٣ س − ٢ ص = ٦ (٢)

فنستخرج مقدار المجهول س من المعادلة الثانية بفرض أن ص معلوم فينتج $س = \frac{٦ + ٢ ص}{٣}$ ثم يوضع هذا المقدار بدلا عن س فى المعادلة الاولى فينتج

$$\frac{٥(٦ + ٢ ص)}{٣} + ٣ ص = ٢٩$$

وهى معادلة تشتمل على المجهول ص وباستخراج مقداره منها يحدث أن ص = ٣

ثم نستبدل المجهول ص بمقداره وهو ٣ فى احدى المعادلتين (١) و (٢) ولتكن الاولى مثــلا فينتج

٥ س + ٩ = ٢٩ ومنها س = ٤

فالمقداران المطلوبان هما ٤ و ٣

الحذف بالمقارنة

(١٣٠) قاعدة ـ نستخرج مقدار أحد المجهولين من كل من المعادلتين ثم نساوى مقداريهما ببعضها فتحدث معادلة بمجهول واحد

ليكن المطلوب حل المجموعة ٥ س + ٣ ص = ٢٩ (١)

٣ س − ٢ ص = ٦ (٢)

نستخرج س من معادلة (١) فيحدث $س = \frac{٢٩ - ٣ ص}{٥}$

ثم نستخرج س من معادلة (٢) فيحدث $س = \frac{٦ + ٢ ص}{٣}$

وحيث ان هذين المقدارين هما مقدارا المجهول س فيكونان متساويين ويحدث

$$\frac{٢٩ - ٣ ص}{٥} = \frac{٦ + ٢ ص}{٣}$$

ويحل هذه المعادلة يوجد أن $ص = ٣$

ثم يستبدل المجهول ص بالمقدار ٣ فى احدى المعادلتين وليكن فى معادلة (١) مثلا فيحدث

$$٥ س + ٩ = ٢٩$$

ويحلها يحدث $س = ٤$

تنبيه ـ هذه الطريقة تسمى طريقة التساوى

الحذف بالجمع أو الطرح

(١٢١) قاعدة ـ يلزم اتحاد مكررى المجهول المراد حذفه فى المعادلتين ولذلك نضرب طرفى الاولى فى مكرر هذا المجهول من الثانية ونضرب طرفى الثانية فى مكرره من الاولى ثم نجمع المعادلتين الناتجتين على بعضهما اذا اختلفت علامتا المجهول المراد حذفه فيهما أو نطرح احداهما من الاخرى اذا اتحدت العلامتان

فاذا كان المطلوب حل المجموعة

$$٥ س + ٣ ص = ٢٩ \quad (١)$$

$$٣ س - ٢ ص = ٦ \quad (٢)$$

نحد مكررى المجهول ص بأن نضرب طرفى المعادلة الاولى فى ٢

وطرفى الثانية فى ٣ فيحدث

١٠ س + ٦ ص = ٥٨ (٣)

٩ س − ٦ ص = ١٨ (٤)

ثم نجمع المعادلتين ٣ و ٤ على بعضهما لاختلاف علامتى ص فيهما فيحدث

١٩ س = ٧٦ (٥)

وبحل هذه المعادلة يوجد أن س = ٤

ثم اذا عوّض المجهول س بمقداره وهو ٤ فى معادلة (١) ينتج

٢٠ + ٣ ص = ٢٩ (٦)

وبحل هذه المعادلة يوجد أن ص = ٣

ويمكن أن نتحد مكررى المجهول س بأن نضرب طرفى المعادلة (١) فى ٣ وطرفى المعادلة (٢) فى ٥ فيحدث

١٥ س + ٩ ص = ٨٧ (ح)

١٥ س − ١٠ ص = ٣٠ (ى)

ثم نطرح المعادلة (ى) من (ح) لاتحاد علامتى س فيهما فيحدث

١٩ ص = ٥٧ أو

ص = ٣

ثم اذا عوّض المجهول ص بمقداره وهو ٣ فى معادلة (١) ينتج

٥ س − ٩ = ٢٩ أو

س = ٤

(١٢٢) تنبيـه اذا شوهد ان بين مكررى المجهول المراد حذفه

عوامل مشتركة نبحث عن المضاعف البسيط لمكررى هذا المجهول ثم نضرب طرفى المعادلة الاولى فى خارج قسمة المضاعف البسيط على مكرر هذا المجهول من الاولى ونضرب طرفى المعادلة الثانية فى خارج قسمة المضاعف البسيط على مكرر المجهول المذكور من الثانية

مثلا — ليكن المطلوب حل المجموعة

$$٥ س + ٤ ص = ٣٢ \quad (١)$$

$$٣ س + ٦ ص = ٣٠ \quad (٢)$$

بواسطة حذف المجهول ص بطريقة الجمع أو الطرح يقال حيث ان مكررى المجهول ص وهما ٤ ، ٦ بينهما عامل مشترك فنبحث عن المضاعف البسيط لهما يوجد ١٢ ثم نضرب طرفى المعادلة الاولى فى خارج قسمة ١٢ على ٤ أى فى ٣ ونضرب طرفى المعادلة الثانية فى خارج قسمة ١٢ على ٦ أى ٢ فينتج

$$١٥ س + ١٢ ص = ٩٦ \quad (٣)$$

$$٦ س + ١٢ ص = ٦٠ \quad (٤)$$

ثم نطرح معادلة (٤) من معادلة (٣) ينتج

$$٩ س = ٣٦ \quad \text{ومنها}$$

$$س = ٤$$

ثم اذا عوّض المجهول س بمقداره وهو ٤ فى احدى المعادلتين (١) ، (٢) وليكن فى الاولى مثلا ينتج

$$٢٠ + ٤ ص = ٣٢$$

ويحلها يحدث ص = ٣

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية

(١٥٦) س + ص = ٨
س − ص = ٢

(١٥٧) س + ٢ص = ١٨
٢س + ص = ١٥

(١٥٨) ٥س − ٣ص = ٧
٣س − ٢ص = ٤

(١٥٩) ٣س + ٢ص = ١٤
٥س − ٨ص = ١٢

(١٦٠) ٩س − ١٢ص = ٦
٦س − ١٦ص = ٢٠

(١٦١) ٢٤س − ٣ص = ٣٩
١٠س + ٩ص = ٤٧

(١٦٢) ٣س − ٧ص = ٦
٥س + ٢ص = ٥١

(١٦٣) ٣س − ٢ص = ١٣
٤س + ٥ص = ٩٤

(١٦٤) س = ٢ص
س + ص = ٣

(١٦٥) ٣(س − ص) = ٦
٤س − ص = ١٧

(١٦٦) ٧س/٢ + ٤ص/٣ = ١٨,٥
٥س/٣ − ص/٢ = ٢

(١٦٧) س/٤ + ص/٥ = ١٧
س/٥ + ص/٤ = ١٩

(١٦٨) $\left\{\begin{array}{l} ٥(\text{س} - ٢) = \text{ص} + ٥ \\ \text{س} + \text{ص} = ٣(\text{ص} - ٥) \end{array}\right.$ (١٦٩) $\left\{\begin{array}{l} \frac{٥}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{ص}} = \frac{١٣}{١٥} \\ \frac{٨}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{ص}} = \frac{١١}{٣} \end{array}\right.$

(١٧٠) $\left\{\begin{array}{l} \frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} = ٥ \\ \frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٣} = ٢\text{س ص} \end{array}\right.$ (١٧١) $\left\{\begin{array}{l} \frac{٥}{٦\text{س}} + \frac{٧}{٤\text{ص}} = ١ \\ \frac{٥}{٦\text{ص}} + \frac{١٣}{٩\text{س}} = ١ \end{array}\right.$

(١٧٢) $\left\{\begin{array}{l} \text{س} + \text{أ ص} = \text{ب} \\ \text{س} - \text{ب ص} = \text{ح} \end{array}\right.$ (١٧٣) $\left\{\begin{array}{l} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \text{ح} \\ \frac{\text{س}}{\text{أ}'} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}'} = \text{ح}' \end{array}\right.$

(١٧٤) $\left\{\begin{array}{l} \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \text{ح} \\ \frac{\text{أ}'}{\text{س}} - \frac{\text{ب}'}{\text{ص}} = \text{ح}' \end{array}\right.$ (١٧٥) $\left\{\begin{array}{l} \frac{\text{س}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} - \text{ص}}{\text{أ}} \\ \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \end{array}\right.$

مسائل محلولة بدرجة أولى ومجهولين

(١٢٣) المسئلة الاولى عقار وأطيان تبلغ قيمتهما ١٢٠٠٠ جنيه وايرادهما السنوى ١١٠٠ جنيه والعقار يربح باعتبار ١٠ ٪ من قيمته والاطيان تربح باعتبار ٨ ٪ فما قيمة العقار وما قيمة الاطيان

الحل ــ نرمز لقيمة العقار بحرف س والقيمة الاطيان بحرف ص وحيث ان قيمتهما ١٢٠٠٠ جنيه فتحدث المعادلة

$$\text{س} + \text{ص} = ١٢٠٠٠ \quad (١)$$

وحيث ان ربح مبلغ س فى السنة بسعر ١٠ ٪ هو $\frac{١٠ س}{١٠٠}$ وربح مبلغ ص فى السنة بسعر ٨ ٪ هو $\frac{٨ ص}{١٠٠}$ وان مجموع الربحين هو ١١٠٠ جنيه فتحدث المعادلة

$$\frac{١٠ س}{١٠٠} + \frac{٨ ص}{١٠٠} = ١١٠٠ \quad (٢)$$

وبحل المعادلتين (١) و (٢) ينتج أن س = ٧٠٠٠ جنيه و ص = ٥٠٠٠ جنيه أعنى أن قيمة العقار ٧٠٠٠ جنيه وقيمة الاطيان ٥٠٠٠ جنيه

تنبيه — ويمكن حل هذه المسئلة بمعادلة واحدة

(١٢٤) المسئلة الثانية — عدد مركب من رقمين مجموعهما عشرة واذا عكس هذا العدد يحدث عدد آخر يساوى أربعة أمثال الاول زائدا خمسة عشر

الحل — يرمز لرقم الآحاد بحرف س ولرقم العشرات بحرف ص فيكون العدد المطلوب هو س + ١٠ ص وحيث ان مجموع رقمى العدد هو ١٠ فتحدث المعادلة

$$س + ص = ١٠ \quad (١)$$

واذا عكس هذا العدد ينتج عدد آخر وهو ص + ١٠ س وحيث انه يؤخذ من منطوق المسئلة أن هذا العدد الاخير يساوى أربعة أمثال الاول زائدا ١٥ تحدث المعادلة

$$ص + ١٠ س = ٤ (س + ١٠ ص) + ١٥ \quad (٢)$$

وبحل المجموعة المركبة من معادلتى (١) ، (٢) ينتج أن ص = ١ ، س = ٩ وحينئذ فالعدد المبحوث عنه هو ١٩

(١٢٥) المسئلة الثالثة شخص استلم ٢٠ قطعة من نوع من

العملة المصرية و ٤ قطع من نوع آخر منها فبلغ قيمة ما استلمه $\frac{\text{ص}}{٦٠}$ ثم استلم ٦ قطع من النوع الاول وثلاث قطع من النوع الثانى فبلغت القيمة $\frac{\text{ص}}{٢٧}$ فما قيمة القطعة من كل نوع بالقرش

الحل ـ يرمز لقيمة القطعة من النوع الاول بحرف س ولقيمة القطعة من النوع الثانى بحرف ص فعلى حسب المنطوق يكون قيمة ما استلمه أولا هو ٢٠ س + ٤ ص وحيث انه مساو $\frac{\text{ص}}{٦٠}$ فتحدث المعادلة ٢٠ س + ٤ ص = ٦٠ (١)

ويكون قيمة ما استلمه ثانيا ٦ س + ٣ ص وحيث انه يساوى $\frac{\text{ص}}{٢٧}$ فتحدث المعادلة

٦ س + ٣ ص = ٢٧ (٢)

وبحل مجموعة المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن

س = ٢ ، ص = ٥

أعنى أن قطع النوع الاول من ذات القرشين وقطع النوع الثانى من ذات الخمسة قروش

(١٣٦) المسئلة الرابعة ـ ما هو الكسر الذى اذا أضيف لكل من حديه واحد ينتج نصف واذا طرح من كل من حديه واحد ينتج خمسان

الحل ـ نفرض أن هذا الكسر هو $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ وحيث انه اذا أضيف لحديه واحد ينتج $\frac{١}{٢}$ فتحدث المعادلة

$\frac{\text{س}+١}{\text{ص}+١} = \frac{١}{٢}$ (١)

وحيث انه اذا طرح من حديه واحد ينتج $\frac{٢}{٥}$ فتحدث المعادلة

$$\frac{س-1}{ص-1} = \frac{٢}{٥} \quad (٢)$$

وبحل مجموعة المعادلتين (١) و (٢) ينتج أن

س = ٥ و ص = ١١ ويكون الكسر $\frac{٥}{١١}$

مسائل بدرجة أولى ومجهولين يطلب حلها

(١٧٦) المطلوب ايجاد عددين مجموعهما ٢٣٥ والفرق بينهما ٦١

(١٧٧) عددان ضعف الاول منهما مضافا اليه الثانى يساوى ٤٨ وضعف الثانى مضافا اليه الاول يساوى ٥١ فما هما العددان

(١٧٨) تاجر باع ٧٥ اردبا من القمح و ٤٢ اردبا من الشعير بمبلغ $\frac{جنيه}{١٠٠}$ مصرى ثم باع بالسعر عينه ٥٠ اردبا من القمح و ٦٠ اردبا من الشعير بمبلغ ٨٨ جنيها مصريا فما ثمن الاردب من كل نوع

(١٧٩) شخص وضع جزءا من ماله فى بنك ليربح بسعر ٥ ٪ وباقيه فى بنك آخر ليربح بسعر ٤ ٪ فنتج من المبلغين ربح قدره ٧٠ جنيها فى السنة ولو عكس بان وضع ما فى البنك الثانى فى الاول وما فى الاول فى الثانى يزيد الايراد ٤ جنيهات فى السنة فما هما المبلغان

(١٨٠) أب عمره ثلاثة أمثال عمر ابنه وقبل ١٢ سنة كان عمر الاب ستة أمثال عمر الابن فما عمر كل منهما

(١٨١) ما هو الكسر الذى اذا أضيف الى بسطه ٣ وطرح من مقامه ٤ كان الناتج مساويا للواحد واذا طرح من بسطه

٣ وأضيف لمقامه ٤ كان الناتج مساويا ٣ر٠

(١٨٢) نوعان من القمح اذا خلط ٥ أرادب من الاول مع ٣ أرادب من الثانى يكون ثمن الاردب من المخلوط $\frac{\text{ص}}{٩٠}$ واذا خلط ٣ أرادب من الاول واردب من الثانى يكون ثمن الاردب من المخلوط $\frac{\text{ص}}{٩٢}$ فما ثمن الاردب من كل نوع

(١٨٣) فلاح له فدان عشورى وثلاثة فدادين خراجية ويدفع عنها أموالا أميرية قدرها خمسة جنيهات مصرية فى السنة وبتعديل الضرائب ببلده زيدت الاطيان العشورية ٥٠٪ ونقصت الاطيان الخراجية ١٥ ٪ وبذلك صار يدفع $\frac{\text{ص}}{٤٨٠}$ فى السنة فما مقدار ما كان يدفعه أولا عن كل فدان من العشورى والخراجى

(١٨٤) عدد مركب من رقمين وهو مساو ثلاثة أمثال مجموع رقميه ولو أضيف لذلك العدد ٤٥ لصار بقدر معكوسه فما هذا العدد

(١٨٥) قال شخص لآخر اذا بعت لى ٤ فدادين من أطيانك يصير ما عندى ضعف ما عندك فقال له الآخر نعم ولكن اذا بعت لى أنت ٤ فدادين من أطيانك يصير ما عندى قدر ما يبقى عندك فكم عند كل منهما من الفدادين

(١٨٦) رجل وزوجته يلزمهما ويبة دقيق فى كل ١٥ يوما وبعد أن أكلا منها معا ستة أيام سافر الرجل وأكلت المرأة وحدها الباقى فى ٣٠ يوما والمطلوب معرفة عدد الايام التى يأكل فيها كل منهما وحده الويبة

(١٨٧) كيس يسع ١٩ قطعة من ذات العشرة قروش و ٦ قطع من ذات القرشين ولكن ٤ قطع من ذات العشرة قروش وخمس قطع من ذات القرشين تشغل $\frac{١٧}{٦٣}$ منه والمطلوب معرفة مقدار مايسع من كل نوع منهما على حدته

(١٨٨) مخزن يسع ١٣ زكيبة دقيق و ٣٣ برميل خل فوضع فيه ٥ زكائب دقيق و ٩ براميل خل فشغلت ثلث المخزن والمطلوب معرفة ما يسعه هذا المخزن من كل واحد من النوعين على حدته

(١٨٩) تاجر اشترى ٥٧٠ برتقاله بعضها بسعر كل ١٢ بقرش والبعض بسعر كل ١٨ بقرش وباع الجميع بسعر ١٥ بقرش وبذلك ربح ٣ قروش فما ثمن ما اشتراه من كل نوع

(١٩٠) المطلوب تقسيم ١٣٥ فدانا بين ثلاثة أشخاص بحيث تكون نسبة نصيب الاول الى نصيب الثانى كنسبة $\frac{٤}{٥}$ ونسبة نصيب الثانى الى نصيب الثالث كنسبة $\frac{٥}{٦}$

حل مجموعة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل ذات درجة أولى

(١٣٧) قاعدة — لحل مجموعة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل ذات درجة أولى نحذف أحد هذه المجاهيل من احدى المعادلات المفروضة مع كل من المعادلتين الاخرتين على التوالى فتحدث مجموعة معادلتين بمجهولين نجرى حلها كما تقدم وبعد معرفة

مقدارى هذين المجهولين نستعيضهما بمقداريهما فى احدى المعادلات المحتوية على الثلاثة مجاهيل فتحدث معادلة ذات مجهول واحد يمكن ايجاد مقداره

مثال ذلك ليكن المطلوب حل المجموعة

٥ س + ٤ ص − ٢ ع = ٧ (١)

٣ س − ٢ ص + ٣ ع = ٨ (٢)

٧ س + ٣ ص − ٤ ع = ١ (٣)

فنحذف المجهول ع من معادلتى (١) و (٢) وليكن بطريقة الجمع والطرح فتحدث المعادلة

٢١ س + ٨ ص = ٣٧ (٤)

ثم نحذف المجهول ع من معادلتى (٢) ، (٣) بالطريقة المذكورة فتحدث المعادلة ٣٣ س + ص = ٣٥ (٥)

ثم نكوّن من المعادلتين (٤) ، (٥) مجموعة ونحلها كما تقدم فنجد أن س = ١ ، ص = ٢ ثم نعوض س ، ص بمقداريهما فى احدى المعادلات المشتملة على الثلاثة مجاهيل وليكن فى معادلة (١) فيحدث ١٣ − ٢ ع = ٧ ومنها ع = ٣ وحينئذ تكون المقادير ١ ، ٢ ، ٣ هى مقادير المجاهيل س ، ص ، ع على التوالى فى المجموعة المفروضة

(١٢٨) تنبيه يقاس على ماذكر حل مجموعة أربعة معادلات ذات أربعة مجاهيل وحل مجموعة خمسة معادلات ذات خمسة مجاهيل وهلم جرا

وسنذكر قاعدة عامة لحل مجموعة جملة معادلات بجملة مجاهيل فنقول

حل مجموعة معادلات ذات جملة مجاهيل

(١٣٩) قاعدة عمومية لحل مجموعة معادلات عددها م ذات مجاهيل عددها م يحذف أحد هذه المجاهيل من احدى هذه المعادلات مع كل واحدة من المعادلات الاخرى التى عددها م ــ ١ على التوالى فتحدث مجموعة مركبة من معادلات عددها م ــ ١ مشتملة على مجاهيل بقدرها

ثم يحذف أحد هذه المجاهيل من احدى المعادلات التى عددها م ــ ١ مع كل واحدة من المعادلات الاخرى التى عددها م ــ ٢ على التوالى فتحدث مجموعة مركبة من معادلات عددها م ــ ٢ مشتملة على مجاهيل بقدرها

وبالاستمرار على ذلك نتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد فيمكن حلها ثم يوضع مقدار هذا المجهول فى احدى معادلتى المجموعة المشتملة على مجهولين فتحدث معادلة مشتملة على المجهول الثانى فيمكن استخراج مقداره

ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين فى احدى معادلات المجموعة المشتملة على ثلاثة مجاهيل فتحدث معادلة مشتملة على المجهول الثالث فيمكن ايجاد مقداره

وبالاستمرار على هذه الكيفية نتوصل الى ايجاد مقادير جميع

مجاهيل المجموعة المفروضة على التوالى مثلا لحل المجموعة

أ
- س + ص − ع − ط + ى = ٦ (١)
- ٣س − ٢ص + ٤ع − ٢ط − ى = −١٧ (٢)
- ٢س + ٤ص + ٥ع − ط + ٣ى = ٤٢ (٣)
- س − ٣ص + ٤ع + ط − ٢ى = −١٣ (٤)
- ٤س + ٦ص − ٢ع + ٥ط − ٣ى = ٥٧ (٥)

نحذف المجهول ى من المعادلة (١) مع كل من المعادلات ٢، ٣ و ٤، ٥ بالتوالى فتحدث مجموعة مركبة من أربع معادلات نرمز لها بحرف ب وهى

ب
- ٤س − ص + ٣ع − ٣ط = −١١ (١)
- −س + ص + ٨ع + ٢ط = ٢٤ (٢)
- ٣س − ص + ٢ع − ط = −١ (٣)
- ٧س + ٩ص − ٥ع + ٢ط = ٧٥ (٤)

ثم نحذف المجهول ط من معادلة (١) فى مجموعة ب مع كل من المعادلات ٢، ٣، و ٤ بالتوالى فتحدث مجموعة مركبة من ثلاث معادلات نرمز لها بحرف ح وهى

ح
- ٥س + ص + ٣٠ع = ٥٠ (١)
- −٥س + ٢ص − ٣ع = −٨ (٢)
- ٢٩س + ٢٥ص − ٩ع = ٢٠٣ (٣)

ثم نحذف المجهول ع من معادلة (٢) من مجموعة ح مع كل من معادلتى ١ ، ٣ بالتوالى فتحدث مجموعة مركبة من معادلتين بمجهولتين نرمز لها بحرف د وهى

$$
د \begin{cases} -٤٥ س + ٢١ ص = -٣٠ & (١) \\ ٤٤ س + ١٩ ص = ٢٢٧ & (٢) \end{cases}
$$

ثم نحـذف المجهول ص من هـذه المجموعة فتحدث معادلة ذات مجهول واحد وهى ١٧٧٩ س = ٥٣٣٧ وبحلها يحدث

س = ٣

وبوضع مقدار س فى احدى معادلتى مجموعه د وليكن فى الاولى وحل المعادلة الناتجة نجد أن ص = ٥

وبوضع مقدارى س ، ص فى احدى معادلات مجموعه حـ وليكن فى الاولى وحل المعادلة الناتجة نجد أن ع = ١

وبوضع مقادير س ، ص ، ع فى احدى معادلات مجموعـه ب وليكن فى الثالثة وحـل المعادلة الناتجة نجد أن ط = ٧

وبوضـع مقادير س ، ص ، ع ، ط فى احـدى معادلات مجموعه أ وليكن فى الاولى وحل المعادلة الناتجة نجدأن ن = ٦

فتكون المقادير ٣ , ٥ , ١ , ٧ , ٦ هى المقابلة للمجاهيل س , ص , ع , ط , ن على التوالى

(١٣٠) قد فرضنا فيما تقدم فى حل مجموعة معادلات أن كل معادلة تشتمل على جميع مجاهيل المجموعة فاذا لم تشمل كل معادلة عـلى جميع المجاهيـل المفروضـة تسمى المجموعـة ذات معادلات غير تامة وحلها كحل المجموعة ذات المعادلات التامة غير أنه ممـا ينبغى التنبـه له أن يبدأ بحـذف المجهول الداخل أقل عددا من غيره فى معادلات المجموعة

مثال لحل المجموعة أ

$$\text{٢س} + \text{٣ص} - \text{٢ع} = \text{١٠} \quad \text{(١)}$$
$$\text{٥س} - \text{٣ع} = \text{١٢} \quad \text{(٢)}$$
$$\text{٢ص} + \text{٣ى} = \text{١٩} \quad \text{(٣)}$$
$$\text{٣س} - \text{٤ص} - \text{٢ع} + \text{٢ى} = \text{٩} \quad \text{(٤)}$$

يشاهد أن المجهول ى داخل فيها بعدد أقل من غيره فيبتدأ بحذفه من المعادلتين ٣ و ٤ فتحدث معادلة مجردة منه فاذا ضمت هذه المعادلة الى المعادلتين ١ و ٢ تحدث مجموعة ثلاث معادلات ذات ثلاث مجاهيل نرمز لها بحرف ب وهى

ب

$$\text{٢س} + \text{٣ص} - \text{٢ع} = \text{١٠} \quad \text{(١)}$$
$$\text{٥س} - \text{٣ع} = \text{١٢} \quad \text{(٢)}$$
$$\text{٩س} - \text{١٦ص} - \text{٦ع} = -\text{١١} \quad \text{(٣)}$$

وحيث ان المجهول ص داخل فى هذه المعادلات بعدد أقل من غيره يحذف من معادلتى ١ و ٣ فتحدث منهما معادلة مشتملة على المجهولين س و ع وباضافتها للمعادلة (٢) تحدث مجموعة مركبة من معادلتين بمجهولين فاذا رمز لها بحرف ح يحدث

ح

$$\text{٥س} - \text{٣ع} = \text{١٢} \quad \text{(١)}$$
$$\text{٥٩س} - \text{٥٠ع} = \text{١٢٧} \quad \text{(٢)}$$

واذا حذف المجهول ع من هذه المجموعة تحدث المعادلة

$$\text{٧٣س} = \text{٢١٩} \quad \text{ومنها} \quad \text{س} = \text{٣}$$

وبوضع مقدار س فى احدى معادلتى مجموعة ح يمكن أنه يستخرج مقدار ع ويرى أنه يساوى ١ وبتعويض س و ع

بمقداريهما فى احدى معادلات مجموعة ب (التى تكون مشتملة على المجهول ص) ينتج أن ص = ٢ ثم بوضع مقادير س ، ع ، ص فى احدى معادلات مجموعة ا (التى تكون مشتملة على ر) ينتج مقداره ويوجد أنه يساوى ٥

(١٣١) اذا وجدت مجاهيل مجموعة داخلة فى المقامات كما فى المجموعة

$$\frac{٥}{س} + \frac{٣}{ص} = ١٢٫٥ \quad (١)$$

$$\frac{٤}{س} - \frac{٢}{ص} = ٣٫٤ \quad (٢)$$

فالاسهل فى الحل أن يؤخذ مجاهل مساعده فنفرض أن $س = \frac{١}{س'}$ و $ص = \frac{١}{ص'}$ فتؤل المجموعة الى هذه الصورة

$$٥ س' + ٣ ص' = ١٢٫٥ \quad (١)$$

$$٤ س' - ٢ ص' = ٣٫٤ \quad (٢)$$

وبحل هذه المجموعة يوجد أن $س' = ١٫٦$ و $ص' = ١٫٥$ ومن ذلك يمكن استخراج مقدارى س ، ص بأن يقال حيث فرض أن $س = \frac{١}{س'}$ فيكون $س = ١ : ١٫٦ = ٠٫٦٢٥$ أى $\frac{٥}{٨}$ وحيث فرض أن $ص = \frac{١}{ص'}$ فيكون $ص = ١ : ١٫٥ = \frac{٢}{٣}$

ويمكن الحل بكيفية أخرى وهى أن يحذف أحد المجهولين ص ولذلك نعمد البسطين ٣ ، ٢ بأن نضرب طرفى المعادلة (١) فى ٢ وطرفى المعادلة (٢) فى ٣ فيحدث

$$\frac{١٠}{س} + \frac{٦}{ص} = ٢٥ \quad (١)$$

$$\frac{١٢}{س} - \frac{٦}{ص} = ١٠,٢ \quad (٢)$$

وبجمع هاتين المعادلتين يوجد $\frac{٢٢}{س} = ٣٥,٢$ ومن هذه المعادلة ينتج أن $س = \frac{٢٢}{٣٥,٢} = ٠,٦٢٥ = \frac{٥}{٨}$ ثم بوضع مقدار س فى احدى المعادلتين الاصليتين وليكن فى الاولى فيحدث $\frac{٥}{٠,٦٢٥} + \frac{٣}{ص} = ١٢,٥$ وبحلها يحدث $ص = \frac{٢}{٣}$

(١٣٢) تنبيه — اذا كان عدد المعادلات مساويا لعدد المجاهيل تكون المجموعة ممكنة الحل كما شوهد فى المجموعات السابقة غير أنه يشترط أن لايكون بين معادلات المجموعة الواحدة تخالف فى مقادير المجاهيل ولا أن يكون بعض المعادلات متداخلا فى بعض فان ذلك يؤدى الى عدم امكان الحل

واذا كان عدد المعادلات أكثر من عدد المجاهيل يؤخذ منها معادلات بقدر عدد المجاهيل وتحل تلك المعادلات فاذا وضعت مقادير المجاهيل التى تنتج منها فى المعادلات الباقية وتطابقت كانت المجموعة ممكنة الحل وتكون المعادلات الباقية لا فائدة فيها واذا لم تتطابق فالمجموعة تكون غير ممكنة الحل

أما اذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل تكون المجموعة غير معينة الحل

مثلا اذا فرضت مجموعة ذات معادلتين ومحتوية على ثلاثة مجاهيل وحذف أحد هذه المجاهيل فتبقى معادلة بمجهولين وقد تقدم بنمرة

١١٤ ان كل معادلة بمجهولين لها مقادير غير معينة فاذا أخذ أى مقدارين من هذه المقادير ووضعا بدل المجهولين فى احدى المعادلات الاصلية وجد للمجهول الثالث مقدار مطابق لذينك المقدارين ثم اذا أخذ مقداران آخران وأجرى العمل كما ذكر ينتج للمجهول الثالث مقدار آخر وعلى هذه تكون المجموعة غير معينة الحل

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية

(١٩١) س + ٤ ص − ٢ ع = ٣
س − ٨ ص + ١٢ ع = ٢١
٢ س + ص + ٣ ع = ١٣

(١٩٢) ٢ س + ٥ ص + ٤ ع = ١٧
٣ س + ٢ ص − ع = ٢
٥ س + ٣ ص − ٢ ع = ٢

(١٩٣) ٥ س + ٣ ص − ٢ ع = ٢٣
٣ س − ص + ٤ ع = ٥٥
٢ س + ٧ ص + ٥ ع = ٧٣

(١٩٤) ٢ س + ٣ ص − ع = ١
٣ س + ٢ ص − ٢ ع = ١٣
٥ س − ٤ ص − ٢ ع = ١١

(١٩٥) س + ص = ١٠

س + ع = ١٩

ص + ع = ٢٣

(١٩٦) ٥ س + ٢ ص = ١٤

ص − ٦ ع = −١٥

س + ٢ ص + ع = ٠

(١٩٧) س + ص + ٣ ع + ط = ١٤

٤ س + ٢ ص + ع + ط = ٢٥

٢ س + ص + ٣ ع − ط = ١٦

٥ س − ٤ ص − ع + ط = ٧

(١٩٨) س + ص − ع + ٢ ط = ٨

س − ص + ٢ ع + ط = ٩

− س + ٢ ص + ع − ط = ٢

٢ س + ص + ع + ط = ١١

(١٩٩) س + ص + ٢ ط + ٣ ع = ١٨

س + ٣ ص + ط + ع = ١٧

ص + ٣ ط − ٤ ع = ٩

ط − ع = ٢

(٢٠٠) ٣ ع + ٢ ن − ٥ ص = ١٨

٣ س + ص − ٤ ن = ٩

س + ٧ ص − ٦ ن = −١٣

٥ ع − ٢ س − ٨ ص + ٢ ن = ١٥

(٢٠١) ٣س + ص − ٢ع + ط + ٢ى = ١٣
٢س − ٣ص + ٣ع − ٢ط − ى = −٨
٥س + ٢ص + ع + ٣ط + ٣ى = ٣٩
٤س − ٥ص + ٤ع + ٥ط + ى = ٣١
س + ص − ع + ط + ى = −١

(٢٠٢) ٢س + ٣ص − ع + ط = ٢١
ص + ٢ع − ٤ط + ى = ٣
٣س − ٢ص + ٣ط − ى = ١٢
٢س + ٤ص − ٥ع + ٣ى = ١٤
٢س + ٢ع + ٥ط − ٢ى = ٢٤

(٢٠٣) س + ص = ٨
ص + ط = ٧
ط − ٢و = ٢
و + ع = ٣
ع + ى = ٩
ى − س = ٢

(٢٠٤) س + ص = ٨
س + ط = ١١
س + و = ٦
س + ى = ١٢
ى + ع = ٩
ط − ٢و = ٤

مسائل محاولة بجملة مجاهيل بدرجة أولى

(١٣٣) المسئلة الاولى عائلة تصرف فى الشهر جـ ١٠٠ فى ثمن بن وسكر وصابون أخذت فى أول شهر ٩ أرطال من البن و٢٨ رطلا من السكر و١٨ رطلا من الصابون وأخذت فى ثانى شهر ١٠

أرطال من البن و ٢٠ رطلا من السكر و ٢٠ رطلا من الصابون وفى ثالث شهر أخذت ١١ رطلا من البن و ٢١ رطلا من السكر و ١٦ رطلا من الصابون فما ثمن الرطل من كل نوع

الحل نرمز لثمن الرطل من البن بحرف س ولثمن الرطل من السكر بحرف ص ولثمن الرطل من الصابون بحرف ع فعلى حسب منطوق المسئلة تحدث المجموعة الآتية

٩ س + ٢٨ ص + ١٨ ع = ١٠٠

١٠ س + ٢٠ ص + ٢٠ ع = ١٠٠

١١ س + ٢١ ص + ١٦ ع = ١٠٠

وبحل هذه المجموعة نجد أن س = ٥ ، ص = ١ ، ع = ١,٥ أعنى أن ثمن الرطل من البن خمسة قروش ومن السكر قرش ومن الصابون قرش ونصف

(١٣٤) المسئلة الثانية — سمسار عنده عربة وحصان وعجلة وحمار معرضة للبيع ثمن العربة والحصان ٩٠ جنيها وثمن العربة والعجلة ٦٨ جنيها وثمن العربة والحمار ٦٠ جنيها وثمن العجلة والحصان ٥٨ جنيها فما ثمن كل منها على حدته

الحل نرمز لثمن العربة بحرف س ولثمن الحصان بحرف ص ولثمن العجلة بحرف ع ولثمن الحمار بحرف م فعلى حسب منطوق المسئلة تحدث المجموعة الآتية

س + ص = ٩٠ (١)

س + ع = ٦٨ (٢)

س + م = ٦٠ (٣)

ع + ص = ٥٨ (٤)

وبحل هذه المجموعة نرى أن ثمن العربة ٥٠ جنيها وثمن الحصان ٤٠ جنيها وثمن العجلة ١٨ جنيها وثمن الحمار ١٠ جنيهات

(١٣٥) كلف مهندس بعمل مساحة قطعة أرض فقسمها الى ثلاث مثلثات متساوية ومستطيلين متساويين وثمان مربعات متساوية وشبهى منحرف متساويين ومعين ووجد أن مساحتها ثلاثة أفدنة وقال ان مساحة مثلث ومستطيل ومربع وشبهى المنحرف تعادل نصف القطعة وان مساحة المستطيلين وشبه منحرف والمعين تعادل نصف القطعة أيضا وان مساحة الثمان مربعات وشبهى المنحرف تعادل نصف القطعة كذلك وأما مساحة مستطيل ومربع ومعين فتعادل ربع القطعة فقط فما مساحة كل شكل على حدته مقدرا بالقصبة المربعة

الحل نرمز لمساحة المثلث بحرف س ولمساحة المستطيل بحرف ص ولمساحة المربع بحرف ع ولمساحة شبه المنحرف بحرف ط ولمساحة المعين بحرف ن فبناء على منطوق المسئلة تحدث المجموعة الآتية

٣س + ٢ص + ٨ع + ٢ط + ن = ١٠٠٠ قصبة
س + ص + ع + ٢ط = ٥٠٠ «
٢ص + ط + ن = ٥٠٠ «
٨ع + ٢ط = ٥٠٠ «
ص + ع + ن = ٢٥٠ «

وبحل هذه المجموعة يوجد أن مساحة كل مثلث تساوى ٥٠ قصبة ومساحة كل مستطيل تساوى ١٢٥ قصبة ومساحة كل مربع تساوى ٢٥ قصبة ومساحة كل شبه منحرف = ١٥٠ قصبة ومساحة المعين ١٠٠ قصبة

مسائل بجملة مجاهيل ودرجة أولى يطلب حلها

(٢٠٥) المطلوب ايجاد ثلاثة أعداد يكون مجموع الاول والثانى ٢٧ ومجموع الثانى والثالث ٣٣ ومجموع الاول والثالث ٣٠

(٢٠٦) اقسم ٢٢٠ فدانا بين ثلاثة أشخاص بحيث ان الثانى يأخذ زيادة عن ثلثى نصيب الاول بقدر ١٦ فدانا والثالث يأخذ أقل من $\frac{٣}{٤}$ الثانى بقدر ٣ أفدنة

(٢٠٧) ثلاثة من الخيل وعربة معرضة للبيع فأما ثمن العربة فهو ٤٤ جنيها مصريا واذا بيعت مع الحصان الاول تكون قيمتهما قدر ثمن الحصانين الثانى والثالث واذا بيعت العربة مع الحصان الثانى كان ثمنهما قدر ضعف ثمن الحصانين الاول والثالث معا وأما اذا بيعت مع الحصان الثالث كان ثمنهما بقدر ٣ أمثال ثمن الحصانين الاول والثانى فما ثمن كل حصان على حدته

(٢٠٨) ثلاثة سبائك من الذهب وزنها ٥ مثاقيل وعيارها على التعاقب ٩٢٠ر٠ و ٨٥٠ر٠ و ٨٠٠ر٠ واذا سبكت الاولى مع الثانية ينتج سبيكة عيارها ٩٠٠ر٠ واذا سبكت

الثانية مع الثالثة ينتج سبيكة عيارها ٠٫٨٢٠ فما وزن كل سبيكة على حدتها

(٢٠٩) زيد وعمرو وبكر مع كل واحد منهم مبلغ فأعطى زيد لكل من عمرو وبكر مقدارا بقدر مامعه ثم اقتدى به عمرو فأعطى كلا من زيد وبكر مقدارا بقدر ما معه (بعد قسمة زيد) ثم ان بكرا أعطى أيضا لكل من زيد وعمرو مقدارا بقدر ما معه وبذلك وجد أن كلا منهم معه $\frac{ج}{٣٢٠}$ فما مقدار ما كان مع كل واحد منهم أولا

(٢١٠) حوض مسلط عليه أربع حنفيات الاولى والثانية علآنه فى ٣ ساعات والثانية والثالثة علآنه فى أربع ساعات والثالثة والرابعة فى ٥ ساعات والاولى والثالثة فى ٣٫٤ ساعة فما مقدار الزمن الذى تملأ فيه كل منها ذلك الحوض

(٢١١) صراف يحجز خمسة مليمات فى مقابلة صرف الجنيه الانجليزى استبدل منه جنيه فدفع قطعة من الذهب و ١٢ قطعة من الفضة و٢٧ قطعة من النيكل ثم استبدل منه جنيه آخر فدفع قطعتين من الذهب و٨ قطع من الفضة و١٦٥ قطعة من البرونز استبدل منه جنيه ثالث فدفع ١٦ قطعة من الفضة و٣٤ قطعة من النيكل و٤٠ قطعة من البرونز ثم استبدل منه جنيه رابع فدفع ١٨ قطعة من الفضة و١٨ قطعة من النيكل وخمس قطع من البرونز فمن بعد معرفة أن قطع الذهب متحدة القيمة وكذا قطع الفضة والنيكل والبرونز يراد معرفة قيمة القطعة من كل نوع منها بالقرش

(٢١٢) المطلوب تقسيم ٩٢٤٦ فرنكا بين أربعة أشخاص بحيث اذا أخذ الاول فرنكين يأخذ الثانى ٣ فرنكات واذا أخذ الثانى ٥ فرنكات يأخذ الثالث ٦ فرنكات واذا أخذ الرابع ٤ فرنكات يأخذ الثالث ٣ فرنكات

(٢١٣) فرس معروضة للبيع فقال زيد انه يمكنه شراؤها لو أخذ ربع مامع عمرو وقال عمرو انه يمكنه شراؤها لو أخذ ثمن مامع بكر وقال بكر انه يمكنه شراؤها لو أخذ نصف مامع زيد وقد وجد أن ما معهم يزيد عن ضعف ثمن الفرس بمقدار ٤ جنيهات فما ثمن الفرس وما مقدار ما مع كل واحد منهم

(٢١٤) عدد مركب من أربعة أرقام حاصل جمعها يساوى ١١ ورقم العشرات يساوى مجموع رقمى المئين والالوف ورقم الالوف يساوى مجموع رقمى المئين والآحاد واذا طرح من العدد ١٧٢٨ يبقى عدد مؤلف من أرقام العدد الاول غير أنها مقلوبة الترتيب

المتباينات

(١٣٦) تعريف — المتباينة هى وضع جبرى مركب من كميتين غير متساويتين فاذا كان كمية ب أكبر من ح فالوضع ب > ح يسمى متباينة وكمية ب تسمى الطرف الاول و ح تسمى الطرف الثانى والكميتان ب ٯ ح قد تكونا موجبتين أو سالبتين أو احداهما موجبة والاخرى سالبة ومما ينبغى ملاحظته ان كل كمية موجبة فهى أكبر من صفر وان الصفر أكبر من أى كمية سالبة وان

أ كبر الكميتين السالبتين ما يكون مقدارها المطلق أصغر

(١٣٧) المتباينتان تكونان متكافئتين متى كانت احداهما نتيجة عن الاخرى و بالعكس فاذا كانت كمية ب أ كبر من ح فالفرق ب ــ ح يكون موجبا وبالعكس اذا كان ب ــ ح موجبافالكمية ب تكون أ كبر من ح وحينئذفالمتباينتان ب > ح ، ب ــ ح > . متكافئتان

(١٣٨) من المهم معرفة القواعد التى يمكن اجراؤها على المتباينات بدون أن تختل الشروط المبينة فيها ومعرفة ماتتغير به المتباينات وأنواع تغيرها وان كان فى بعض الاحوال تنطبق عليها قواعد التساوية ولنأت بذكر أهم هذه القواعد فنقول

(١٣٩) قاعدة اذا أضيف أوطرح كمية واحدة من طرفى متباينة فلا تختل الشروط المبينة لها

مثلا اذا أضيف لطرفى المتباينة ب > ح كمية م فيكون ب + م > ح + م وذلك لانه يؤخذ من المتباينة المفروضة أن ب ــ ح > . وحيث ان الكمية ب ــ ح لا تتغير اذا أضيف وطرح منها كمية م فاذن تكون مكافئة الى ب ــ ح + م ــ م أو الى ب + م ــ (ح+م) أى ان هذا الفرق يلزم أن يكون موجبا وحينئذ يكون ب + م > ح + م

و بمثل ذلك يقال فى طرح كمية مثل م من طرفى المتباينة

(١٤٠) ينتج من هذه القاعدة أنه يمكن تحويل حد من طرف لآخر وتغير اشارته

(١٤١) قاعدة ــ اذا ضرب أو قسم طرفا متباينة فى أو على كميــة واحدة فالناتج يكون متباينة متحدة أو غير متحدة الجهة مع المتبـاينة المفروضة على حسب ما تكون هذه الكميــة موجبــة أوسالبة

لتكن المتباينة ب > ح المكافئة الى ب ــ ح > ٠ .

فأولا اذا ضرب طرفاهــذه المتباينة فى كيــة موجبــة م فيكون ب م > ح م وذلك لانه لما كانت الكمية ب ــ ح موجبــة فلا تزال كذلك اذا ضربت فى أى كمية موجبة مثل م أى

(ب ــ ح) م > ٠ أو ب م ــ ح م > ٠ ومن هذا يؤخذ أن ب م > ح م

ثانيا ــ اذا ضرب طرفا المتباينة المفروضة فى كمية سالبة مثــل ــ م يكون ــ ب م < ــ ح م وذلك لانه لما كانت الكميــة ب ــ ح موجبة فاذا ضربت فى كمية سالبة ــ م يكون الناتج سالبا أى (ب ــ ح) ــ م < ٠ أى

ــ ب م ــ (ــ م ح) < ٠ وحيث أن الفرق بين ــ ب م و ــ م ح سالب فهذا دليل على أن ــ ب م < ــ م ح

ويقــال ذلك يقال فى حالة القسمة حيث ان قسمة طرفى المتباينة على كمية مثل م هو عين ضربها فى $\frac{١}{م}$

تنبيــه ــ هذه القاعدة حقيقة مهما كانت حدود المتباينة المفروضــة أى سواء كانا موجبين أو سالبين أوأحدهــما موجب والآخر سالبا

(١٤٢) ينتج من ذلك أولا انه يمكن حذف المقامات من متباينة بطريقة مشابهة لحذفها من المعادلة غير أنه ينبغى ملاحظة تغيير جهة المتباينة فى الحالة التى يكون فيها المقام سالبا

ثانيا — يمكن تغيير اشارات المتباينة والناتج من هذا التغيير يكون متباينة مغايرة للمتباينة المفروضة فى الجهة لان هذا التغيير عبارة عن ضرب طرفى المتباينة فى — ١

(١٤٣) قاعدة — اذا جمعت متباينتان متحدتان فى الجهة على بعضهما طرفا على طرف فان المتباينة الجديدة تكون متحدة الجهة معهما

ولبيان ذلك نفرض المتباينتين ح > ء ، ه > و فهاتان المتباينتان يكافآن الى ح — ء > ٠ ، ه — و > ٠

وحيث ان مجموع أى كميتين موجبتين هو موجب فيكون

ح — ء + ه — و > ٠ . وبنقل الحدين — ء ، — و الى الطرف الثانى ينتج ح + ه > ء + و

تنبيه اذا كانت المتباينتان المفروضتان مختلفتين فى الجهة فليست هناك قاعدة لمعرفة جهة المتباينة الجديدة وقد تؤل الى متساوية

(١٤٤) قاعدة اذا طرحت متباينة من أخرى مختلفة معها فى الجهة طرفا من طرف فان جهة المتباينة الجديدة تكون عين جهة المتباينة المطروح منها

ولبيان ذلك نفرض المتباينتين ح > ء ، ه < و فهاتان

المتباينتان تكافئتان الى ح − ء > ٠ ، و − ه > ٠ وحيث
ان مجموع أى كميتين موجبتين هو موجب فيكون

ح − ء + و − ه > ٠ . وبتحويل − ء ، + و الى الطرف
الثانى ينتج ح − ه > ء − و

تنبيه اذا كانت المتباينتان المفروضتان متحدتى الجهة فليست
هناك قاعدة لمعرفة جهة المتباينة الجديدة

(١٤٥) قاعدة اذا ضربت أى متباينتين ذاتى حدود موجبة
ومتحدتى الجهة فى بعضهما طرفا فى طرف على الترتيب فان
المتباينة الجديدة تكون متحدة الجهة مع كل من المتباينتين
المفروضتين

ولبيان ذلك نفرض المتباينتين ح > ء ، ه > و وحيث ان
ه ، ء موجبين فيمكن ضرب طرفى المتباينة الاولى فى ه والثانية
فى ء ويحدث

ح ه > ء ه ، ء ه > ء و ومنهما يكون ح ه > ء و

تنبيه اذا كانت الحدود الاربعة سالبة فان المتباينة الجديدة
تكون مختلفة الجهة مع المتباينتين المفروضتين

فاذا كان ح > ء ، ه > و وكان كل من ح ، ء ، ه ، و
سالبا ثم ضرب طرفى المتباينة الاولى فى ه والثانية فى ء ولوحظ أن
ضرب طرفا المتباينة فى كمية سالبة يؤدى الى متباينة مختلفة الجهة
مع المتباينة المفروضة كما فى نمرة (١٤١) ينتج ح ه < ء ه

و ى ه < ى و ومنهما يكون ح ه < ى و

ولا يمكن اعطاء قاعدة عمومية متى لم تكن كل الحدود موجبة أو كلها سالبة

(١٤٦) قاعـدة ـ اذا قسمت متباينتين ذاتى حدود موجبة ومختلفتين فى الجهة على بعضهما طرفا على طرف فان المتباينـة الجديدة تكون متحدة الجهة مع المتباينة المأخوذة مقسوما

فاذا كان ح > ى و ه < و فيمكن كتابة ح > ى و و > ه

و بضرب هاتين المتباينتين فى بعضهما ينتج

ح و > ى ه وبقسمة الطرفين على ه و ينتج

ح/ه > ى/و

تنبيـه ـ اذا كانت الحدود الاربعة سالبة فان المتباينة الجديدة تكون متحدة فى الجهة مع المتباينة المقسوم عليها

فاذا كان ح > ى و ه < و وكانت الحدود الاربعة سالبة

فيمكن كتابة ح > ى و و > ه وبضرب هاتين المتباينتين فى بعضهما ينتج

ح و < ى ه (بموجب تنبيـه نمرة ١٤٥) وبقسمـة الطرفين على ه و ينتج ح/ه < ى/و

ولا يمكن اعطاء قاعدة عمومية متى لم تكن كل الحدود موجبـة أوكلها سالبة

حل متباينة الدرجة الاولى

(١٤٧) تعريف ـ يقال ان المتباينة ذات مجهول واحـد

وبدرجة أولى متى لم تشتمل الاعلى مجهول واحد من الدرجة الاولى ويشترط أن لا يكون داخلا فى مقام ولا تحت علامة جذر .

وكل متباينة من الدرجة الاولى عكن أيلولتها الى هذه الصورة

ح س + ء > حَ س + ءَ

و ح ، ء ، حَ ، ءَ رموز لمقادير معلومة موجبة أو سالبة

(١٤٨) قاعدة لحل متباينة بدرجة أولى ومجهول واحد تحذف المقامات والاقواس ان وجدت ثم تحوّل الحدود المشتملة على المجهول الى طرف والحدود المعلومة الى الطرف الآخر ثم تختصر حدود الطرفين ثم يقسم الطرفان على مكرر المجهول

فلحل المتباينة ح س + ء > حَ س + ءَ تحوّل الحدود المشتملة على المجهول الى طرف والحدود المعلومة الى طرف آخر فيحدث ح س ــ حَ س > ءَ ــ ء ثم نأخذ س مضروبا مشتركا فى الطرف الاول فيحدث (ح ــ حَ) س > ءَ ــ ء وبقسمة الطرفين على ح ــ حَ يحدث

س > (ءَ ــ ء)/(ح ــ حَ) ان كان ح ــ حَ موجبا

وأما ان كان ح ــ حَ سالبا فيحدث

س < (ءَ ــ ء)/(ح ــ حَ)

ولحل المتباينة ٤ س ــ ٣/٢ > ٦ س/٥ + ٢ تحذف المقامات فيحدث

٤٠ س — ١٥ > ١٢ س + ٢٠ ثم نحول حدود كل نوع الى طرف فيحدث

٤٠ س — ١٢ س > ٢٠ + ١٥ وبالاختصار يحدث

٢٨ س > ٣٥ وبالقسمة على مكرر س يحدث

س > $\frac{٥}{٤}$

فالمتباينة تتحقق بكل مقدار يفرض للمجهول س بحيث يكون أكبر من $\frac{٥}{٤}$

الحلول السالبة

(١٤٩) اذا حلت معادلة أو مجموعة معادلات وكان حلها سالبا وعوض المجهول أو المجاهيل بهذه المقادير السالبة فلا بد أن هذه المقادير تحقق تلك المعادلة أو المعادلات وحينئذ فلا مانع من اعتبار الاعداد السالبة حلولا للمعادلة أو المعادلات لكن متى كانت المجاهيل مبينة لكميات مقتضى تعينها فن المعلوم أن الاعداد السالبة لاتدل على أدنى كميات وحينئذ فيكون الحل السالب دالا على الاستحالة

(١٥٠) قاعدة اذا ظهر مقدار سالب لحل معادلة ذات درجة أولى ومجهول واحد واعتبر هذا المقدار موجبا فانه يكون محققا للمعادلة التى يتحصل عليها بتغيير اشارات الحدود التى تحتوى على المجهول

فبحل المعادلة $\frac{٣س + ١٨}{س + ٤} = ١٢$

يوجد س = — ٣ وبأخذ ٣ موجبا يكون حلا لمعادلة يتحصل عليها بتغيير اشارات الحدود المشتملة على المجهول أى يكون حلا للمعادلة

$$\frac{١٨ - ٢ س}{٤ - س} = ١٢$$

اذ بحلها ينتج أن س = ٣

وهذه القاعدة نافعة فى اصلاح منطوق المسائل التى يكون حلها سالبا ولنوضح ذلك بحل المسئلة الآتية

(١٥١) مسئلة شخص عمره ٤٠ سنة وعمر ابنه ١٦ سنة فبعد كم سنة يصير عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن

الحل نرمز بحرف س للمقدار المطلوب فيكون عمر الاب وقتئذ ٤٠ + س وعمر الابن ١٦ + س وحيث انه فى ذلك الوقت يكون عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن تحدث المعادلة

٤٠ + س = ٣ (١٦ + س) وبحلها يحدث

س = — ٤

وهذا الحل يدل على أن المسئلة مستحيلة فاذا اعتبر هذا المقدار موجبا كان حلا لمعادلة يمكن الحصول عليها بتغيير اشارات الحدود المشتملة على المجهول أعنى يكون حلا للمعادلة

٤٠ — س = ٣ (١٦ — س) اذ بحلها يوجد أن س = ٤

وهذه المعادلة تكون ترجمة للمسئلة الآتية

شخص عمره ٤٠ سنة وعمر ابنه ١٦ سنة فقبل كم سنة كان عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن ولا شك أن منطوق هذه المسئلة

قريب جدا من منطوق المسئلة المفروضة ولا فرق بينهما الا بتغيير كلمة (بعد كم سنة) الى (قبل كم سنة) حيث ان الوقت الذى يوفى بشروط المسئلة قد مضى قبل بلوغهما سن ٤٠ و ٦٦

(١٥٢) تنبيه ــ يؤخذ مما تقدم أنه متى كان الحل سالبا يدل على تحريف فى المسئلة ويمكن اصلاحه بتغييره فى المعنى المضاد

فاذا فرض أن المطلوب حساب مقدار يلزم اضافته ووجد سالبا فيمكن اصلاح المنطوق بأن يلزم طرحه

واذا فرض أن المطلوب حساب زمن فى المستقبل ووجد سالبا فيمكن اصلاح المسئلة باعتباره فى الماضى

واذا كان المطلوب حساب طول مستقيم يؤخذ على يمين نقطة معينة ووجد سالبا فيمكن اصلاح المسئلة باعتبار أخذ البعد اللازم على يسار تلك النقطة

واذا كان المراد البحث عن درجة حرارة فوق الصفر ووجد المقدار سالبا فيمكن اصلاح المسئلة باعتبار الدرجات تحت الصفر وهكذا

حالة الاستحالة

(١٥٣) المسئلة تكون مستحيلة الحل اذا كانت باحدى الصور الآتية

الاولى أن يكون لها حل سالب ولا يقبل تأويلا

الثانية أن تكون مقادير مجاهيلها ليست مطابقة لمنطوقها كأن دل المجهول الداخل فى مسئلة على أشخاص أو أشجار أو أشياء غير قابلة للتجزئة و وجد مقداره كسرا عوضا عن أن يكون عددا صحيحا ٠

الثالثة أن يؤل مقدار المجهول الى هذه الصورة $\frac{ح}{٠}$ أعنى يكون س $= \frac{ح}{٠}$ اذ معنى ذلك أنه يلزم البحث عن عدد اذا ضرب فى صفر ينتج كمية ح وحيث ان جميع الاعداد المحدودة اذا ضربت فى صفر لا ينتج من ذلك الا صفر وهو طبيعة أقل من كمية ح فيكون مقدار المجهول أكبر من أى كمية أى لانهائى ويرمز له عادة بالعلامة ∞ ولنوضح ذلك بحل المسائل الآتية

(١٥٤) المسئلة الاولى صانع كثير الانقطاع عن الشغل رغب أن يشتغل فى ورشة فاشترط عليه الرئيس أن تكون أجرته اليومية $\frac{ح}{١}$ ولكن اذا تأخر عن الحضور يلتزم بغرامة قدرها $\frac{ح}{٥}$ عن كل يوم فبعد ستة أيام طلب رئيس الورشة من الصانع $\frac{ح}{١٥}$ بحسب شروطهما فما عدد الايام التى اشتغلها

الحل نرمز لعدد الايام التى اشتغلها بحرف س فتكون أجرته فيها ١٠ س وتكون الايام التى انقطع فيها عن الشغل هى ٦ − س والغرامة التى يدفعها عنها هى ٥ (٦ − س) وحيث ان مقدار الغرامة أكبر من الاجرة بمقدار $\frac{ح}{٣٥}$ فيحدث المعادلة ١٠ س + ٣٥ = ٥ (٦ − س) وبحل هذه المعادلة يوجد

$$س = -\frac{١}{٣}$$

وحيث ان هذا المقدار السالب لامعنى له ولا يمكن تأويله فتكون المسئلة مستحيلة الحل ومن دقق النظر فى المنطوق تظهر له الاستحالة اذ انقطاعه المدة كلها لا يؤدى الى دفع ٣٥

(١٥٥) المسئلة الثانية ـ مكارى كاف بنقل ٢٣ قنطارا فنقلها على ثمان دواب من جمال وبغال فكان حمل كل جمل ٤ قناطير وحمل كل بغل قنطاران فكم عدد كل نوع

الحل نرمز بحرف س لعدد الجمال فيكون ٨ ــ س هو عدد البغال ويكون ما حملته الجمال هو ٤ س وما حملتـه البغال ٢(٨ ــ س) وحيث ان جملة ما نقل ٢٣ قنطارا فتحدث المعادلة

٤ س + ٢ (٨ ــ س) = ٢٣ وبحلها يوجد

س = ٣,٥

أعنى أن عدد الجمال هو ٣,٥ وبناء على ذلك يكون عدد البغال ٤,٥ وحيث ان كلا من عـدد الجمال والبغال يجب أن يكون عددا صحيحا فالمسئلة تكون مستحيلة الحل

(١٥٦) المسـئلة الثالثة شخص وضع ٣٠٠ جنيه فى تجارة مدة ٤ سنوات وكان يربح فيها مقـدارا مخصوصا عن كل مائة فى السنة ووضع ٤٠٠ جنيه فى تجارة مدة ٣ سـنوات وكان يربح فيهـا مقدارا مساويا لما ربحه عن كل مائة فى السـنة للمبلغ الاول وبعد ذلك وجد أن ربح المبلغ الثانى يزيد عن الاول ١٥ جنيها فما ربح المائة فى كل من المبلغين

الحل نرمز لربح المائة فى كل من المبلغين بحرف س فبلغ ٣٠٠ جم

يربح فى ٣ سنين $\frac{٣٠٠ \times ٤ \times س}{١٠٠}$ أى ١٢ س والمبلغ الثانى يربح بالسعر عينه فى ٤ سنين $\frac{٤٠٠ \times ٣ \times س}{١٠٠}$ = ١٢ س

وحيث انه يؤخذ من المنطوق أن ربح المبلغ الثانى يزيد عن الاول ١٥ جنيها فتحدث المعادلة

١٢ س + ١٥ = ١٢ س وبحل هذه المعادلة

يوجد س = $\frac{١٥}{٠}$ = ∞

وحيث انه لايوجد عدد اذا ضرب فى صفر ينتج ١٥ فتكون المسئلة مستحيلة الحل

حالة عدم التعيين

(١٥٧) المسئلة تكون غير معينة الحل اذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل أو ظهر مقدار المجهول بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ أى س = $\frac{٠}{٠}$ ومعنى ذلك ايجاد عدد اذا ضرب فى صفر ينتج صفرا وحيث ان كل عدد اذا ضرب فى صفر ينتج صفرا فيعلم أن أى عدد يحقق المسئلة وحينئذ فلا تكون معينة الحل

ولنأت على ذلك بأمثلة فنقول

(١٥٨) المسئلة الاولى — ماهما العددان اللذان خارج قسمتهما ٣

الحل نفرض العددين س ، ص فعلى حسب منطوق المسئلة يحدث $\frac{س}{ص}$ = ٣

ولحل هذه المعادلة يعطى مقدار اختيارى وليكن ١ الى س

فيوجد $\frac{١}{ص}$ = ٣ وبحل هذه المعادلة بالنسبة الى ص ينتج ص = $\frac{١}{٣}$ فالعددان ١ و $\frac{١}{٣}$ يحلان المسئلة

واذا أعطى الى س مقدار آخر اختيارى مثل ٢ يوجد أن ص = $\frac{٢}{٣}$ واذا جعل س = ٣ يوجد أن ص = ١ واذا جعل س = ٤ نجد أن ص = $\frac{٤}{٣}$ وهكذا فيرى أن المسئلة غير معينة الحل

(١٥٩) المسئلة الثانية — ما السعر الذى يوضع به كل من المبلغين ٤٥ جنيها و ١٣٥ جنيها حتى يكون ايراد الثانى ثلاثة أمثال ايراد الاول

الحل يفرض أن السعر س فيكون ايراد ٤٥ جنيها هو $\frac{٤٥ س}{١٠٠}$ وايراد الثانى $\frac{١٣٥ س}{١٠٠}$ وعلى حسب منطوق المسئلة يكون

٣ × $\frac{٤٥ س}{١٠٠}$ = $\frac{١٣٥ س}{١٠٠}$ وبحذف المقام يحدث

١٣٥ س = ١٣٥ س وبالتحويل يحدث

١٣٥ س — ١٣٥ س = ٠ . وباخذ س مضروبا مشتركا يحدث (١٣٥ — ١٣٥) س = ٠ أو

س = $\frac{٠}{٠}$

أعنى أن المطلوب ايجاد عدد اذا ضرب فى صفر ينتج صفرا وحيث ان أى عدد اذا ضرب فى صفر ينتج صفرا فيكون أى عدد يصلح لحل المسئلة

وبالتأمل فى منطوق المسئلة يسهل معرفة أنها غير معينة الحل حيث ان المبلغ الثانى ثلاثة أمثال الاول فأى سعر حسب لهما

ينتج منه أن ايراد الثانى ثلاثة أمثال الاول

مناقشة المسائل

(١٦٠) مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل اليها الحل بفروض مختلفة على المعاليم

ولايضاح ذلك نأخذ المسئلة الآتية ونجرى مناقشتها

(١٦١) ما هو العدد اللازم اضافته لحدى الكسر $\frac{ح}{ء}$ ليكون الناتج مساويا لكمية م

الحل نفرض أن العدد المطلوب هو س فعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$$\frac{ح + س}{ء + س} = م$$ وبحلها نجد

$$س = \frac{م ء - ح}{١ - م}$$

ولمناقشة هذه المسئلة نعطى فروضا مختلفة للمعاليم

أولا ـ اذا فرض أن $\frac{ح}{ء} = \frac{٤}{٧}$ ، م $= \frac{٢}{٣}$ بأن جعل ح $= ٤$ ، ء $= ٧$ ، م $= \frac{٢}{٣}$ يؤل مقدار س السابق الى

$$\frac{٧ \times \frac{٢}{٣} - ٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{١}{٣}} = ٢$$

أعنى أنه اذا أضيف ٢ الى حدى الكسر $\frac{٤}{٧}$ يصير $\frac{٦}{٩}$ أى $\frac{٢}{٣}$ وهذا ناتج لااشكال فيه

ثانيا ـ اذافرض ان $\frac{ح}{ء} = \frac{٥}{٨}$ ، م $= \frac{١}{٢}$ بأن جعل ح $= ٥$ ، ء $= ٨$ ، م $= \frac{١}{٢}$ يؤل مقدار س السابق الى

$$\frac{\frac{1}{2}\times 8-5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4-5}{\frac{1}{2}}=-2$$

والمقدار −٢ السالب يدل على عدم امكان حل المسئلة
وفى الواقع ان المسئلة مستحيلة لانه بالتأمل لهذا الفرض يرى
أن الكسر $\frac{5}{8}$ أكبر من نصف ومعلوم انه اذا أضيف عدد
واحد لحدى الكسر ازداد ذلك الكسر فاذن لايمكن اضافة عدد
واحد الى حديه ليكون الناتج $\frac{1}{2}$
ثالثا اذا فرض أن $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}=\frac{5}{9}$ ، م = ١ بان جعل ح = ٥
، ء = ٩ ، م = ١ يؤل مقدار س السابق الى

$$\frac{1\times 9-5}{1-1}=\frac{4}{0}$$

والمقدار $\frac{4}{0}$ يدل على كمية لا نهاية لها واذن فتكون المسئلة
مستحيلة الحل
وفى الواقع انها كذلك لانه بالتأمل يمكن مشاهدة هذه الاستحالة
اذ أن الكسر لا يساوى واحدا الا اذا كان بسطه مساويا لمقامه
وحيث ان حدى الكسر غير متساو بين أى بينهما فرق ومعلوم
انه باضافة عدد واحد اليهما لا يزال هذا الفرق ثابتا ولا يمكن
محوه ليتساوى الحدان فقد تبين وجه الاستحالة
رابعا اذا فرض أن $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}=\frac{5}{5}$ ، م = ١ بأن نجعل ح = ٥
، ء = ٥ ، م = ١ يؤل مقدار س السابق الى $\frac{1\times 5-5}{1-1}$

$$=\frac{0}{0}$$

والمقدار $\frac{ب}{\cdot}$ يدل على عدم تعين المسئلة وبالتأمل فى هذا الفرض يرى أن حدى الكسر $\frac{\cdot}{\cdot}$ متساويان وأى عدد أضيف اليهما لا يغير التساوى بينهما وبذلك ينتج كسر موف بالشرط المطلوب

(١٦٣) تنبيه ـ ينتج مما تقدم أن مقدار المجهول فى مسئلة يكون باحدى الصور الاربعة الآتية

وهى اما أن يكون موجبا أو يكون سالبا أو يكون كمية غير محدودة مثل $\frac{جـ}{\cdot}$ أو يكون كمية غير معينة مثل $\frac{\cdot}{\cdot}$

فأما الحلول الموجبة فانها تحدث غالبا عند توفر شروط المسئلة وصحة منطوقها وامكان وضعها جيدا على صورة معادلة وحينئذ تدل على امكان حل المسئلة الا فى أحوال استثنائية تدل فيها على الاستحالة كأن كان المطلوب البحث عن مقدار صحيح ووجد كسريا

وأما الحلول السالبة فتدل على استحالة حل المسئلة وقد تكون الاستحالة ناشئة من فساد فى منطوق المسئلة ويمكن فى بعض الاحوال اصلاح ذلك المنطوق

وأما الحلول غير المحدودة أى اللانهائية فتدل على استحالة حل المسئلة أيضا

وأما الحلول غير المعينة فتدل على أن للمسئلة جملة حلول غير أنه فى بعض الاحيان تختبر بعض تلك الحلول ويؤخذ اللائق منها بالمسئلة المفروضة

تمارين على الحلول السالبة المستحيلة والغير المعينة

(٢١٥) أب عمره ٤٥ سنة وعمر ابنه ١٩ سنة فبعد كم سنة يصير عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن

(٢١٦) أجرة نقل كل عشرة كيلوجرام من البضاعة بالسكة الحديد لمسافة كيلومتر واحد هى ١٨ر٠ مليم ويؤخذ ٣٥ مليما عن كل رسالة (أجرة الشحن والتفريغ) فما مقدار المسافة التى يمكن أن ينقل اليها ٢٠ رسالة زنة الواحدة ١٠٠ كيلوجرام بمبلغ ٣٩٢ مليما

(٢١٧) ١٢ ساعة جيب بعضها من الذهب والبعض من الفضة قومت بمبلغ ١٣٠٦ شلنات وقدرت الساعة الذهب بمبلغ ١٥٠ شلنا والساعة الفضة بمبلغ ٣٦ شلنا فما عدد ساعات كل نوع

(٢١٨) ما هو العدد الذى اذا أضيف اليه ثلاثة أعشاره وطرح من المجموع ٦٠ كان الباقى مساويا لنصف هذا العدد مضافا اليه أربعة أمثال باقى طرح ١٥ من خمس ذلك العدد

(٢١٩) ما هو العدد الذى اذا أضيف الى حدى الكسر $\frac{٥}{٧}$ يكون الناتج مساويا لواحد

(٢٢٠) ساعيان ابتدآ فى السير فى وقت واحد على الطريق أب فى اتجاه واحد وأحدهما ابتدأ من نقطة ا وسرعته ع والثانى ابتدأ من نقطة ب وسرعته عَ والساعى المبتدئ من ب متقدم عن المبتدئ من ا بالمسافة ء والمطلوب معرفة بعد النقطة التى يتقابل فيها الساعيان على الطريق ا ب محسوبا من نقطة ا

(ومناقشة هذه المسئلة)

المربع والجذر التربيعى

(١٦٣) تعريف — مربع أىّ كمية هو حاصل ضرب عاملين مساويين لها

مثلا مربع ح هو $ح \times ح = ح^{2}$

ومربع $-ح$ هو $-ح \times -ح = ح^{2}$

(١٦٤) قاعدة — مربع حاصل ضرب عدة عوامل يساوى حاصل ضرب مربعاتها

مثلا $(ح ى هـ)^{2} = ح^{2} ى^{2} هـ^{2}$ لان $(ح ى هـ)^{2} = ح ى هـ \times ح ى هـ = ح ح ى ى هـ هـ = ح^{2} ى^{2} هـ^{2}$

(١٦٥) نتيجة لتربيع حد يربع مكرره وتضاعف أسس حروفه فربع $٣ ب^{2} ح^{3} = ٩ ب^{4} ح^{6}$ ومربع $\frac{1}{5} ح^{2} ى هـ$ هو $\frac{1}{25} ح^{4} ى^{2} هـ^{2}$

تنبيه — تقدم بنمرة ٤٢ قانون مربع كمية ذات حدين وبنمرة ٤٩ قانون مربع كمية كثيرة الحدود

(١٦٦) تعريف — قوة أى كمية بدرجة ما هى حاصل ضرب عوامل مساوية لها عددها بقدر درجة القوة

أعنى $ح^{م} = ح \times ح \times ح \times ح$ .... بقدر م

وبالقياس على ماسبق يكون $(ح ى هـ)^{م} = ح^{م} ى^{م} هـ^{م}$ ،

$(٣ ح^{3} ى^{2} هـ)^{5} = ٢٤٣ ح^{15} ى^{10} هـ^{5}$.

تنبيه تقدم بنمرة ٣٤ بيان علامات قوى الحدود الموجبة والسالبة

(١٦٧) تعريف ــ الجذر التربيعى لكمية هو كمية اذا رفعت الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

مثلا $\sqrt{ح^{2}} = ح$ ، $\sqrt{٦٤\, ه^{٤}} = ٨\, ه^{2}$

، $\sqrt{\frac{1}{٤} ح^{2} ء^{2}} = \frac{1}{2} ح ء$

لانه اذا رفع كل منها الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

(١٦٨) قاعدة ــ الجذر التربيعى لحاصل ضرب عدة عوامل يساوى حاصل ضرب الجذور التربيعية لها

مثلا $\sqrt{ح ء ه} = \sqrt{ح}\ \sqrt{ء}\ \sqrt{ه}$ لان $(\sqrt{ح}\ \sqrt{ء}\ \sqrt{ه})^{2}$

$= (\sqrt{ح})^{2} \times (\sqrt{ء})^{2} + (\sqrt{ه})^{2} = ح ء ه$

(١٦٩) نتيجة لايجاد الجذر التربيعى لحد يؤخذ الجذر التربيعى لمكرره وتنصف اسس حروفه

مثلا $\sqrt{٦٤ ح^{٤} ء^{٦}} = ٨ ح^{2} ء^{3}$ ، $\sqrt{\frac{1}{١٦} ح^{٤} ء^{2}} = \frac{1}{٤} ح^{2} ء$

(١٧٠) تنبيه الحد يكون مربعا كاملا متى كان مكرره مربعا كاملا وأسس حروفه زوجية وفى هذه الحالة يمكن أخذ جذره أما اذا لم يكن مربعا كاملا فيبين جذره بوضعه تحت علامة الجذر ويسمى مقدارا غير جذرى أو جذرا أصم

(١٧١) تعريف الجذر الميمى لكمية هو كمية اذا رفعت الى القوة الميمية تنتج الكمية الاولى فاذا كان $ح^{م} = ء$ يكون $\sqrt[م]{ء}$

$= ح$

وبالقياس على ماسبق يكون $\sqrt[م]{ح\,ء\,هـ} = \sqrt[م]{ح}\ \sqrt[م]{ء}\ \sqrt[م]{هـ}$

و $\sqrt[٣]{١٢٥\,ح^{٣}\,ء^{٦}\,هـ^{٩}} = ٥\,ح\,ء^{٢}\,هـ^{٣}$

(١٧٢) مقادير الجذور التربيعية ـ لكل كمية موجبة جذران تربيعيان متساويان فى المقدار المطلق ومختلفان فى العلامة

مثلا $\sqrt{٢٥} = +٥$ ، $\sqrt{٢٥} = -٥$

لان $+٥ \times +٥ = ٢٥$ ، $-٥ \times -٥ = ٢٥$

ويكتب $\sqrt{٢٥} = \pm ٥$ ويقرأ زائدا أوناقصا خمسة

وعموما $\sqrt{ح^{٢}} = \pm ح$

(١٧٣) تنبيه حيث ان القوى الفردية للحدود الموجبة تكون موجبة وللحدود السالبة تكون سالبة فيؤخذ من ذلك أن علامة الجذر التكعيبي لحد هى عين علامة ذلك الحد أعنى

$\sqrt[٣]{ح^{٣}} = ح$ ، $\sqrt[٣]{-ح^{٣}} = -ح$

(١٧٤) قاعدة ـ لايجاد الجذر التربيعى لكمية كثيرة الحدود ترتب هذه الكمية بالنسبة للدرجات التصاعدية أوالتنازلية لحرف فيها ويؤخذ الجذر التربيعى لاول حد منها فينتج أول حد من الجذر يطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم يقسم أول حد من الباقى على ضعف الجذر فينتج الحد الثانى من الجذر ثم يضعف أول حد من الجذر ويضاف اليه الحد الثانى ويضرب المجموع فى الحد الثانى ويطرح الحاصل من الباقى الاول ثم يقسم أول

حد من الباقى الثانى على ضعف أول حد من الجذر فينتج ثالث حد من الجذر ثم يضعف الحدان الاولان ويضاف لهما الحد الثالث ويضرب المجموع فى الحد الثالث و يطرح الحاصل من الباقى الثانى و يستمر فى العمل هكذا حتى تنتهى العملية

مثلا لايجاد الجذر التربيعى لكمية $٩ ح^{٤} + ٤٦ ح^{٢} ء^{٢} + ٢٥ ء^{٤} - ٢٤ ح^{٣} ء - ٤٠ ح ء^{٣}$ نرتبها بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ح ونجرى العمل هكذا

$٩ح^{٤} - ٢٤ح^{٣}ء + ٤٦ح^{٢}ء^{٢} - ٤٠حء^{٣} + ٢٥ء^{٤}$	$٣ح^{٢} - ٤حء + ٥ء^{٢}$
$- ٩ح^{٤}$	$٦ح^{٢} - ٤حء$
$- ٢٤ح^{٣}ء + ٤٦ح^{٢}ء^{٢} - ٤٠حء^{٣} + ٢٥ء^{٤}$	$- ٤حء$
$٢٤ح^{٣}ء - ١٦ح^{٢}ء^{٢}$	
$٣٠ح^{٢}ء^{٢} - ٤٠حء^{٣} + ٢٥ء^{٤}$	$٦ح^{٢} - ٨حء + ٥ء^{٢}$
$- ٣٠ح^{٢}ء^{٢} + ٤٠حء^{٣} - ٢٥ء^{٤}$	$٥ء^{٢}$

وكيفية العمل أن نستخرج جذر الحد الاول $٩ ح^{٤}$ فينتج $٣ ح^{٢}$ نربع هذا الحد ونطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم نقسم الحد الاول من الباقى وهو $- ٢٤ ح^{٣} ء$ على ضعف الجذر أى على $٦ ح^{٢}$ فينتج $- ٤ ح ء$ وهو ثانى حد من الجذر ثم نضعف الحد الاول ونضيف الى هذا الضعف الحد الثانى فينتج $٦ ح^{٢} - ٤ ح ء$ يضرب فى الحد الثانى وهو $- ٤ ح ء$ فينتج $- ٢٤ ح^{٣} ء + ١٦ ح^{٢} ء^{٢}$ و يطرح هذا الحاصل من الباقى الاول

ثم يقسم أول حد من الباقى الثانى وهو ٣٠ ح٢ ء٢ على ضعف الحد الاول من الجذر وهو ٦ ح٢ فينتج ٥ ء٢ وهو ثالث حد من الجذر ثم نضاعف الحدين الاولين ونضيف لهما الحد الثالث فينتج ٦ ح٢ − ٨ ح ء + ٥ ء٢ نضربه فى الحد الثالث ٥ ء٢ ينتج ٣٠ ح٢ ء٢ − ٤٠ ح ء٣ + ٢٥ ء٤ فنطرح هذا الحاصل من الباقى الثانى فلا يبقى شئ

(١٧٥) تنبيه لايمكن ايجاد الجذر التربيعى لكمية الا اذا كانت مربعا كاملا

ويعلم أن الكمية غير مربع كامل بعد ترتيبها بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف فيها اذا كان الحد الاول غير مربع كامل أو كان الحد الثانى لايقبل القسمة على ضعف جذر الحد الاول وكذلك اذا كان الحد الاخير غير مربع كامل او كان الحد الذى قبله مباشرة لايقبل القسمة على ضعف جذره أوكان الحد الاول من أى باق لايقبل القسمة على ضعف الحد الاول من الجذر

(١٧٦) تنبيه ذات الحدين لاتكون مربعا كاملا مطلقا لان مربع الحد هو حد. ومربع ذات الحدين يشتمل على ثلاثة حدود ومربع كثيرة الحدود هو كمية كثيرة الحدود

تمارين

(٢٢١) مامربع كل من الكميات ح ، − ء ، هـ٢ ، ٣ ح ء

، − ٢ ح ه^{٢} ، ٤ ه و^{٢} ل^{٣} ، ح/ء ، − ه/و ، ه^{٢}/ن

المطلوب ايجاد الجذور التربيعية للكميات الآتية

(٢٢٢) ٢٥ ح^{٤} ء^{٢} ، ٨١ س^{٢} ص^{٢} ، $\frac{١}{٢٢٥}$ ح^{٢} ء^{٢} ه^{٨} ، $\frac{١}{٥١٢}$ س^{٨} ص^{٤}

(٢٢٣) س^{٢} − ٢ س + ١ ، س^{٢} + ٤ س + ٤ ، س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١}{١٦}$

(٢٢٤) ٤ ح^{٤} − ١٢ ح^{٣} ء + ٢٥ ح^{٢} ء^{٢} − ٢٤ ح ء^{٣} + ١٦ ء^{٤}

(٢٢٥) ٩ س^{٤} + ١٢ س^{٣} ص − ٢ س^{٢} ص^{٢} − ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}

(٢٢٦) $\frac{١}{٤}$ ح^{٤} + $\frac{١}{٣}$ ح^{٣} + $\frac{١٣}{٣٦}$ ح^{٢} + $\frac{١}{٦}$ ح + $\frac{١}{١٦}$

(٢٢٧) س^{٤} + ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٢ س + ١

عمليات الجذور

(١٧٧) تعريف ـ الجذور المتشابهة هى ما اتحدت فيها الكميات التى تحت علامة الجذر واتحدت درجة أدلتها

فالجذور ٣ $\sqrt{\text{حء}}$ ، ٤ $\sqrt{\text{حء}}$ ، − ٥ $\sqrt{\text{حء}}$ هى جذور متشابهة

(١٧٨) قاعدة لجمع أوطرح جذور متشابهة نجمع أو نطرح مكرراتها ثم يوضع الناتج مكررا لاحد الجذور

فمجموع الجذرين ٥ $\sqrt{\text{ح}}$ ، ٦ $\sqrt{\text{ح}}$ هو ١١ $\sqrt{\text{ح}}$ ومجموع

الجذرين ٩ √ه ، — ١٤ √ه هو — ٥ √ه وباقى طرح ٥ √ه من ٨ √ه هو ٣ √ه وباقى طرح — ٥ √ه من ٨ √ه هو ١٣ √ه

تنبيه اذا كانت الجذور غير متشابهة فيبين مجموعها أو باقى طرحها بواسطة العلامات فجموع الجذرين ٣ √ح ، ٧ √ى هو ٣ √ح + ٧ √ى وباقى طرح الاول من الثانى هو ٧ √ى — ٣ √ح

(١٧٩) قاعدة — لضرب جذرين متحدى الدليل فى بعضهما يضرب المكرران فى بعضهما ويؤخذ جذر حاصل ضربهما بالدليل الاصلى

فعلى هذا يكون ٥ √ح × ٧ √ى = ٣٥ √حى

وذلك لانه اذا فرض أن ٥ √ح × ٧ √ى = س ورفع الطرفان الى القوة الثانية ينتج

(٥ √ح × ٧ √ى)² = س² وبموجب نمرة ١٦٤ يكون

٥² × ٧² × ح ى = س² وبأخذ جذر الطرفين يحدث

٥ × ٧ √حى = س وباستعاضة س بمقدارها ينتج

٣٥ √حى = ٥ √ح × ٧ √ى

(١٨٠) قاعدة لقسمة جذرين متحدى الدليل على بعضهما يقسم المكرران على بعضهما ثم تقسم الكميتان اللتان تحت

علامة الجذر ويؤخذ جذر الخارج بالدليل الاصلى

مثلا $١٢\sqrt{ح} : ٤\sqrt{ى} = \frac{١٢}{٤}\sqrt{\frac{ح}{ى}} = ٣\sqrt{\frac{ح}{ى}}$

وذلك لانه اذا فرض ان $١٢\sqrt{ح} : ٤\sqrt{ى} = س$ يكون

$١٢\sqrt{ح} = ٤\sqrt{ى} \times س$ وبتربيع طرفى هذه المتساوية يحدث

$١٤٤ ح = ١٦ ى س^٢$ وبقسمة الطرفين على ١٦ ى ينتج

$\frac{١٤٤ ح}{١٦ ى} = س^٢$ أو

$\frac{١٤٤}{١٦} \times \frac{ح}{ى} = س^٢$ وبأخذ جذر الطرفين ينتج

$\frac{١٢}{٤}\sqrt{\frac{ح}{ى}} = س$ واذا وضع بدلا عن س مقداره ينتج

$١٢\sqrt{ح} : ٤\sqrt{ى} = \frac{١٢}{٤}\sqrt{\frac{ح}{ى}} = ٣\sqrt{\frac{ح}{ى}}$

(١٨١) تنبيه ـ قواعد عمليات الجذور وان كانت عامة غير أن ضرورة استعمالها انما يكون فى الجذور الصماء

(١٨٢) اخراج عامل من تحت علامة الجذر ـ أولا اذا احتوى جذر تربيعى أصم على عوامل زوجية يمكن اخراج تلك العوامل من تحت علامة الجذر واستخراج جذرها ثم ضربه الناتج فى الكمية الباقية

مثلا $\sqrt{ح^٤ ى} = ح^٢\sqrt{ى}$ وذلك لان الكمية $ح^٤ ى$ هى حاصل ضرب $ح^٤$ فى ى وبمقتضى نمرة ١٧٩ يكون $\sqrt{ح^٤ ى} = \sqrt{ح^٤}$

$\times \sqrt{ى} = ح^٢\sqrt{ى}$

ثانيا اذا احتوى الجذر الاصم على عوامل ذات أسس فردية

(غير الواحد) يحال الى عاملين أحدهما مربع كامل و يؤخذ جذره ثم يضرب الناتج فى الكمية الباقية

مثلا $\sqrt{\text{ح}^{٣}\text{ء}^{٥}\text{هـ}} = \text{ح}^{٢}\text{ء}\sqrt{\text{ح ء هـ}}$ ، $\sqrt{١٨\,\text{ح}^{٤}\text{ء}} =$ $٣\text{ح}^{٢}\sqrt{٢\text{ء}}$ ويستدل على ذلك كما فى المثال السابق

تنبيه ـ تسمى هذه العملية باختصار الجذر الاصم

(١٨٣) ادخال مكرر تحت علامة الجذر ـ لذلك يربع هذا المربع و يضرب فى الكمية التى تحت علامة الجذر ثم يوضع الناتج تحت علامة الجذر

مثلا $٣\sqrt{\text{ح}} = \sqrt{٩\text{ح}}$

لان $٣\sqrt{\text{ح}} = \sqrt{٣^{٢}} \times \sqrt{\text{ح}} = \sqrt{٩\text{ح}}$

ازالة بعض الجذور

(١٨٤) ازالة جذور صماء من المقامات

أولا ـ اذا كان مقام كسر جذرا أصم فيمكن ازالته بضرب حدى الكسر فى هذا الجذر

مثلا $\frac{٣}{\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}\times\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\sqrt{\text{ح}}} = \frac{\text{هـ}\sqrt{\text{ح}}}{\sqrt{\text{ح}}\sqrt{\text{ح}}} = \frac{\text{هـ}\sqrt{\text{ح}}}{\text{ح}}$

ثانيا ـ اذا كان مقام كسر كمية ذات حدين أحدهما أو كلاهما جذر أصم فيمكن حذف الجذر الاصم بضرب حدى الكسر فى كمية مثلها مع تغيير علامة الحد الثانى

المثال الاول $\frac{ح}{د + \sqrt{ب}} = \frac{ح(د - \sqrt{ب})}{(د + \sqrt{ب})(د - \sqrt{ب})}$

$= \frac{حد - ح\sqrt{ب}}{د^{٢} - ب}$

المثال الثانى $\frac{ح}{\sqrt{د} - \sqrt{ب}} = \frac{ح(\sqrt{د} + \sqrt{ب})}{(\sqrt{د} - \sqrt{ب})(\sqrt{د} + \sqrt{ب})}$

$= \frac{ح\sqrt{د} + ح\sqrt{ب}}{د - ب}$

(١٨٥) قاعدة ـ اذا اشتملت معادلة على جذر تربيعى يمكن ازالته منها ولذلك يوضع الجذر بانفراده فى أحد الطرفين وباقى الحدود فى الطرف الآخر ثم يربع الطرفان

ففى المعادلة $ح + ب\sqrt{س} = د$ تحول ح الى الطرف الثانى فيحدث $ب\sqrt{س} = د - ح$ ثم نربع الطرفين فيحدث

$ب^{٢} س = د^{٢} - ٢حد + ح^{٢}$

واذا احتوت المعادلة على جذرين تربيعيين فقد يمكن ازالتهما

ففى المعادلة $\sqrt{س} + \sqrt{س - ح} = د$ نحول $\sqrt{س}$ الى الطرف الثانى فيحدث

$\sqrt{س - ح} = د - \sqrt{س}$ ثم نربع الطرفين

فيحدث $س - ح = ء^٢ - ٢ء\sqrt{س} + س$

وبالاختصار والتحويل يحدث

$٢ء\sqrt{س} = ء^٢ + ح$ وبتربيع الطرفين

يحدث $٤ء^٢ س = ء^٤ + ٢ء^٢ ح + ح^٢$

الكميات التخيلية

(١٨٦) من المعلوم أن مربع أى عدد موجب أو سالب لا يكون الا موجبا وحينئذ فبكل كمية سالبه لا يكون لها جذر تربيعى مطلقا ومتى وضعت تحت علامة الجذر تسمى كمية تخيلية مثلا $\sqrt{-٢٥}$ و $\sqrt{-ح^٢}$ تسمى كمية تخيلية اذ لا يوجد كمية موجبة ولا سالبة اذا رفعت الى القوة الثانية ينتج -٢٥ أو $-ح^٢$

(١٨٧) كل كمية تخيلية يمكن تحليلها الى عاملين أحدهما جذر هذه الكمية مأخوذة موجبة والثانى $\sqrt{-١}$

مثلا $\sqrt{-ح^٢} = \sqrt{ح^٢} \times \sqrt{-١} = ح\sqrt{-١}$

و $\sqrt{-ح} = \sqrt{ح} \times \sqrt{-١}$ وحيث أنه يمكن ايجاد $\sqrt{ح}$ فاذا رمز له بحرف $حَ$ يكون $\sqrt{-ح} = حَ\sqrt{-١}$

فالعامل التخيلى الوحيد هو $\sqrt{-١}$

(١٨٨) عمليات الكميات التخيلية ـ قبل الكلام على

عمليات الكميات التخيلية نبحث عن القوى المختلفة للعامل التخيلي $\sqrt{-1}$ فنجد

أولا – $(\sqrt{-1})^{1} = \sqrt{-1}$

ثانيا – $(\sqrt{-1})^{2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

ثالثا – $(\sqrt{-1})^{3} = (\sqrt{-1})^{2} \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

رابعا – $(\sqrt{-1})^{4} = (\sqrt{-1})^{2} \times (\sqrt{-1})^{2} = -1 \times -1 = 1$

خامسا – $(\sqrt{-1})^{5} = (\sqrt{-1})^{4} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$

وحيث ان القوة الخامسة هي عين الاولى فبالاستمرار يشاهد أن القوة السادسة عين الثانية وهكذا أعني أن قوى العامل التخيلي $\sqrt{-1}$ تتغير تغيرا دوريا أربعة فأربعة وتأخذ في كل دور الاربع الصور السابقة

اذا تقرر هذا فيلاحظ في ضرب وقسمة الكميات التخيلية تحليل كل منها الى عاملين كما في(١٨٧) واجراء عمليات الضرب على العامل التخيلي $\sqrt{-1}$ بمقتضى ماذكرآنفا – اما عمليات جمع وطرح الكميات التخيلية فينطبق عليها قواعد عمليات الجذور الصماء ولنوضح ذلك بالامثلة الآتية

(١) $2\sqrt{-\text{ح}^{2}} + 3\sqrt{-\text{ح}^{2}} = 5\sqrt{-\text{ح}^{2}} = 5\text{ح}\sqrt{-1}$

(٢) $7\sqrt{-\text{ح}^{2}} - 3\sqrt{-\text{ح}^{2}} = 4\sqrt{-\text{ح}^{2}} = 4\text{ح}\sqrt{-1}$

$$(٣)\quad \sqrt{-\text{ح}^2} \times \sqrt{-\text{د}^2} = \text{ح}\sqrt{-1} \times \text{د}\sqrt{-1} = -\text{ح}\text{د}$$

$$(٤)\quad \sqrt{-\text{ح}^2} \times \sqrt{-\text{د}^2} \times \sqrt{-\text{هـ}^2} = \text{ح}\sqrt{-1} \times \text{د}\sqrt{-1} \times \text{هـ}\sqrt{-1} = -\text{ح}\text{د}\text{هـ}\sqrt{-1}$$

$$(٥)\quad ٤\sqrt{-\text{ح}^2} \div ٢\sqrt{-\text{د}^2} = ٤\text{ح}\sqrt{-1} \div ٢\text{د}\sqrt{-1} = \frac{٢\text{ح}}{\text{د}}$$

$$(٦)\quad \sqrt{-\text{ح}^2} \div \text{د} = \frac{\text{ح}\sqrt{-1}}{\text{د}} = \frac{\text{ح}}{\text{د}}\sqrt{-1}$$

$$(٧)\quad \text{ح} \div \sqrt{-\text{د}^2} = \frac{\text{ح}}{\sqrt{-\text{د}^2}} = \frac{\text{ح}\sqrt{-\text{د}^2}}{-\text{د}^2} = -\frac{\text{ح}\text{د}\sqrt{-1}}{\text{د}^2} = -\frac{\text{ح}}{\text{د}}\sqrt{-1}$$

وينتج مما تقدم أن حاصل ضرب كميتين تخيليتين هو كمية حقيقية سلبية (انظر مثال ٣) وحاصل ضرب ثلاث كميات تخيلية هو كمية سالبة تخيلية (انظر مثال ٤).

وخارج قسمة كميتين تخيليتين هو كمية حقيقية (انظر مثال ٥) وخارج قسمة كمية تخيلية على كمية حقيقية هو كمية تخيلية (انظر مثال ٦) وخارج قسمة كمية حقيقية على كمية تخيلية هو كمية تخيلية (انظر مثال ٧)

تمارين

المطلوب تحويل الاوضاع الجبرية الآتية الى اوضاع مكافئة لها

(٢٢٨) $د\sqrt{ب} + ه\sqrt{ب} + و\sqrt{ب}$ ، $-٣\sqrt{ح} - ٢\sqrt{ح} - \sqrt{ح}$

(٢٢٩) $٧\sqrt{حد} - (-٢\sqrt{حد} - ٣\sqrt{حد})$ ، $ا\sqrt{دو} + (ب\sqrt{دو} - ح\sqrt{دو})$

(٢٣٠) $\sqrt{٢٤} - ٢\sqrt{٦}$ ، $٥\sqrt{١٢} + \sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{١٨} - \sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢٧} - \frac{٣}{٤}\sqrt{٣}$

(٢٣١) $٣\sqrt{ح} \times ٦\sqrt{د}$ ، $٧\sqrt{هو} \times \sqrt{ح}$ ، $\sqrt{٣س} \times \sqrt{٥س}$

(٢٣٢) $٤\sqrt{حد} \times \frac{٣}{٤}\sqrt{حد}$ ، $ح\sqrt{ه-و} \times د\sqrt{ه+و}$ ، $\sqrt{١+ب} \times \sqrt{١+ب}$

(٢٣٣) $\frac{\sqrt{ح^٢ د}}{\sqrt{د^٢ ح}}$ ، $\frac{\sqrt{د ه^٣}}{\sqrt{ح ه^٣}}$ و $\frac{\sqrt{٢٥ ح^٣ د^٣ ب}}{\sqrt{٥ ح^٣ د ب}}$ و $\frac{\sqrt{٢ ب ح د}}{\sqrt{٤ ح د ه}}$

المطلوب ازالة الجذور من مقامات الكسور الآتية

(٢٣٤) $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٤}{٢\sqrt{٣}}$ ، $\frac{د}{ح\sqrt{س}}$ ، $\frac{ه}{\sqrt{د}}$ ، $\frac{٣+\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$

، $\frac{٤ - \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣}}$

(٢٣٥) $\frac{٨ - \sqrt{٥}}{٣ - ٤\sqrt{٢٠}}$ ، $\frac{٨ + ٣\sqrt{٢} - \sqrt{٣}}{٣\sqrt{٢} + \sqrt{٣}}$ ، $\frac{ح - \sqrt{د}}{هـ - \sqrt{د}}$

(٢٣٦) $\frac{ح + \sqrt{هـ} - \sqrt{و}}{\sqrt{هـ} - \sqrt{و}}$ ، $\frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب} - \sqrt{ح}}$

، $\frac{٧\sqrt{١٨} - ٣\sqrt{٢}}{٦\sqrt{٣} - ٢\sqrt{١٢} + \sqrt{٢}}$

أزل الجذور من المعادلات الآتية

(٢٣٧) $د - ب\sqrt{س} = س - ح$ ، $\sqrt{ح - س} = \sqrt{س} + د$

(٢٣٨) $س + \sqrt{س^{٢} - ب} = ح$ ، $د\sqrt{ح - هـ}\sqrt{د} = ب$

المطلوب تحويل الاوضاع الجبرية الآتيه الى أوضاع أخرى مكافئة لها

(٢٣٩) $٥\sqrt{-أ} + ٣\sqrt{-أ} - ٧\sqrt{-أ}$ ، $٥\sqrt{-د^{٢}}$
$+ ٣\sqrt{-د^{٢}} - ٤\sqrt{-د^{٢}}$

(٢٤٠) $\sqrt{-د^{٢}} \times \sqrt{-و^{٢}}$ ، $\sqrt{-م^{٢}} \times \sqrt{-هـ^{٢}} \times \sqrt{-و^{٢}}$

(٢٤١) $\frac{\sqrt{-ح^{٢} د^{٢}}}{\sqrt{-هـ و^{٤}}}$ و $\frac{\sqrt{-م ن}}{\sqrt{-م^{٢} ن^{٢}}}$ و $\frac{\sqrt{-(ح + د)^{٢}}}{ح + د}$

$$\text{و،}\quad \frac{\text{ح} - \text{ى}}{\sqrt{\;-\,(\text{ح} - \text{ى})^{٢}}}$$

المعادلات ذات الدرجة الثانية

(**١٨٩**) تعريف ــ المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هى معادلة محتوية على مجهول واحد واعظم آسله فيها اثنان

مثل $٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} = ٩٢$

واذا وجد المجهول فى مقام أو تحت علامة جذر يلزم حذفه من المقام أو زالة الجذر بالطرق السابقة

ففى المعادلة $\frac{٨}{\text{س}} + \text{س} = ٦$ يلزم حذف المقام فتؤل الى $٨ + \text{س}^{٢} = ٦\,\text{س}$ فهى من الدرجة الثانية

وفى المعادلة $\sqrt{\text{س}} + ٣\,\text{س} = ١٤$ يلزم ازالة الجذر فتؤل الى $٩\,\text{س}^{٢} - ٨٥\,\text{س} = -\,١٩٦$ وهى من الدرجة الثانية أيضا

ولا يحكم على درجة المعادلة الا اذا كانت صحيحة وجذرية بالنسبة لمجهولها

(**١٩٠**) الصورة العمومية لمعادلة الدرجة الثانية ــ كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهول واحد يمكن أن تؤل الى هذه الصورة

$\text{ح}\,\text{س}^{٢} + \text{ى}\,\text{س} + \text{هـ} = ٠$

لانه يمكن اختصار الحدود المشتملة على $\text{س}^{٢}$ الى حد واحد وكذا

الحدود المشتملة على س ثم اعتبار الكمية المعلومة كحد واحد وحينئذ فكل من الكميات ح ، ء ، هـ الداخلة فى المعادلة العمومية السابقة اما أن يكون حدا واحد أو كمية كثيرة الحدود موجبة أو سالبة وقد يكون بعضها معدوما

(١٩١) أنواع معادلة الدرجة الثانية ـ معادلة الدرجة الثانية نوعان تامة وغير تامة فالتامة هى المشتملة على المجهول بدرجة ثانية وبدرجة أولى وعلى كمية معلومة

مثل ح س^2 + ء س + هـ = ٠

وغير التامة هى اما أن تشتمل على المجهول بدرجة ثانية وعلى كمية معلومة فقط واما أن تشتمل على المجهول بدرجة ثانية وبدرجة أولى كذلك

مثل س^2 ـ هـ = ٠ ، س ـ ء س = ٠

حل معادلات الدرجة الثانية غير التامة

(١٩٢) أولا حل المعادلة

س^2 + هـ = ٠ نحول هـ الى الطرف الثانى ثم نأخذ جذر الطرفين فيحدث س = ± $\sqrt{\text{ـ هـ}}$ أى أن للمعادلة جذرين فاذا كان هـ سالبا يكون ـ هـ موجبا ويكون الجذران حقيقيين واذا كان هـ موجبا يكون ـ هـ سالبا ويكون الجذران تخيليين

مثلا فى المعادلة ٣ سـ^2 — ٧٥ = ٠

يكون سـ = ± $\sqrt{٢٥}$ = ± ٥ أى أن المجهول سـ مقدارين حقيقيين فاذ ارمزلهما بحرفى سـَ ، سـً ينتج سـَ = ٥ ، سـً = — ٥ وكل منهما يحقق المعادلة

وفى المعادلة ٣سـ^2 + ٧٥ = ٠ يكون سـ = ± $\sqrt{-٢٥}$ = ± ٥ $\sqrt{-١}$ أى أن المجهول مقدارين تخيليين

(١٩٣) ثانيا لحل المعادلة سـ^2 — ى سـ = ٠ نأخذ سـ مضروبا مشتركا فيحدث سـ (سـ — ى) = ٠ وحيث ان حاصل ضرب سـ فى (سـ — ى) يساوى صفرا فيلزم أن يكون أحد العاملين أوكلاهما صفرا فاذا فرض أن سـ = ٠ يرى أن مقدار سـ هو صفر وبه تتحقق المعادلة واذا فرض أن سـ — ى = ٠ فيكون سـ = ى وهو أيضا يحقق المعادلة وحينئذ فيكون للمعادلة جذران فاذا رمز لهما بحرفى سـَ ، سـً ينتج سـَ = ٠ ، سـً = ى

مثلا فى المعادلة ٣ سـ^2 — ١٥ سـ = ٠ يكون سـ (٣ سـ — ١٥) = ٠ ومنها يكون سـَ = ٠ ، سـً = ٥

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

(٢٤٢) ٤سـ^2 — ٦٠ = ٠ (٢٤٣) ٥سـ^2 — ٦٣ = — ٢سـ^2

(٢٤٤) ٨١ — ٤سـ^2 = ٧ (٢٤٥) ٧ (سـ^2 — ١) = ١٦٨

(٢٤٦) $\frac{س^٢+١}{٣س} = \frac{س}{٤}$ (٢٤٧) $\frac{٢س+٧}{س+١} = \frac{س-١}{٢س-٧}$

(٢٤٨) $٣س(س-١)=٠$ (٢٤٩) $٥س^٢ - ٦٠س = ٠$

(٢٥٠) $\frac{س^٢}{٣} = ٢س$ (٢٥١) $\frac{س^٢}{١٢} = \frac{س}{٢}$

(٢٥٢) $(س + \frac{س}{٣})س = ٤س$

(٢٥٣) $(٢س + \frac{س}{٤})س - ٢س = ٧س$

(٢٥٤) $٧ح(س^٢+د) = و$ (٢٥٥) $ح س^٢ - ٢ح = ٠$

(٢٥٦) $\frac{ح س}{ح+د} = \frac{ب}{س}$ (٢٥٧) $\frac{س}{ح+ب} = \frac{ح-ب}{د^٢ س}$

(٢٥٨) $س(س-د)=٠$ (٢٥٩) $س(١-٢س) = -س^٢$

مسائل محلولة على معادلات الدرجة الثانية غير التامة

(١٩٤) المسئلة الاولى ـ ما هو العدد الذى اذا طرح خمسة من خمس مربعه ينتج ٤٠

الحل نفرض العدد س وعلى حسب منطوق المسئلة تحدث المعادلة

$$\frac{س^٢}{٥} - ٥ = ٤٠$$ وبحلها يوجد

$$س = \pm ١٥$$ والتحقيق واضح

(١٩٥) المسئلة الثانية رجل عمره خمسة أمثال عمر ابنه ومجموع مربعى عمريهما ١٢٧٤ فما عمر كل منهما

الحل نفرض أن عمر الابن س فيكون عمر الاب ٥ س وعلى حسب منطوق المسئلة توجد المعادلة

$س^2 + ٣٥ س^2 = ١٢٧٤$ وبحلها يحدث

$س = \pm ٧$

أعنى أن عمر الابن ٧ سنوات ويكون عمر الاب ٣٥ سنة أما المقدار السالب فلا يوافق المسئلة

(١٩٦) المسئلة الثالثة — ماهو العدد الذى اذا ضرب ثلثه فى خمسة أثمانه كان الناتج مساويا لعشرة أمثاله

الحل نفرض أن العدد $س$ فيكون ثلثه $\frac{س}{٣}$ وخمسة أثمانه $\frac{٥ س}{٨}$ وعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$\frac{س}{٣} \times \frac{٥ س}{٨} = ١٠ س$ أو

$٥ س^2 = ٢٤٠ س$ أو

$س^2 = ٤٨ س$ أى

$س^2 - ٤٨ س = ٠$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$سَ = ٠$ ، $سً = ٤٨$

(١٩٧) المسئلة الرابعة — ماهو العدد الذى نسبة مربعه الى ٦ كنسبته الى نصف

الحل نفرض أن العدد $س$ فعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$\frac{س^2}{٦} = \frac{س}{٠{,}٥}$ ومنها يكون $س^2 = ١٢ س$ أى

$س^2 - ١٢ س = ٠$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$سَ = ٠$ ، $سً = ١٢$ أعنى أن العدد المطلوب هو ١٢

مسائل على معادلات الدرجة الثانية غير التامة يطلب حلها

(٢٦٠) ما هو العدد الذى اذا ضرب ثلثه فى ربعه ينتج ١٠٨

(٢٦١) ما هو العدد الذى نسبته الى ١٨ كنسبة الواحد الى نصف ذلك العدد

(٢٦٢) قطعة أرض مربعة الشكل اذا أضيف لها ١٫٧٩ مترا مربعا تصيرفدانا فما ضلعها بالمتر

(٢٦٣) ماهو العدد الذى اذا أضيف عشرة الى مربعه ينتج واحد

(٢٦٤) قطعة من الحرير ثمنها ف $\frac{}{٣٢٠}$ وثمن المتر منها يعادل خمس عدد الامتار الدالة على طولها فما ثمن المتر وما مقدار طولها

(٢٦٥) ما هو العدد الذى نسبة مربعه الى ثمانية كنسبة ثلاثة أمثاله الى اثنين

(٢٦٦) ما مقدار طول ضلع الزاوية القائمة فى مثلث قائم الزاوية بعد معرفة أن الضلع الثانى ينقص عن هذا الضلع مترا واحدا وأن الوتر يزيدعنه مترا واحدا

(٢٦٧) سئل شخص عن مقدار سنه فقال انه اذا ضرب ثلثى عمره فى خمسيه كان الناتج مساويا لاربعة أمثاله فما مقدار سنه

(٢٦٨) ما هو العدد الذى ثلاثة أمثال مربعه يساوى تسعة أمثاله

(٢٦٩) ماهو العدد الذى اذا ضرب فى المفرق بينه وبين ١٢ كان الناتج مساويا لثلث مربعه

حل المعادلة ذات الدرجة الثانية التامة

(١٩٨) للمعادلة التامة ذات الدرجة الثانية صورتان الاولى أن يكون مكرر المجهول بدرجة ثانية الواحد . الثانية أن يكون مكرره غير الواحد

(١٩٩) الصورة الاولى

$س^٢ + ى س - هـ = ٠$. ولحلها نحول هـ الى الطرف الثانى فينتج

$$س^٢ + ى س = - هـ$$

وبالتامل للطرف الاول نجد أنه مشتمل على حدين من مربع كمية ذات حدين فيه $س^٢$ مربع الحد الاول و $ى س$ ضعف الاول فى الثانى فاذن يكون الثانى $\frac{ى}{٢}$ فاذا أضيف للطرفين مربعه أى $\frac{ى^٢}{٤}$ ينتج

$$س^٢ + ى س + \frac{ى^٢}{٤} = \frac{ى^٢}{٤} - هـ$$

و يكون الطرف الاول مربع الكمية $س + \frac{ى}{٢}$ فاذا استعيض بها ينتج

$(س + \frac{ى}{٢})^٢ = \frac{ى^٢}{٤} - هـ$ وبأخذ جذر الطرفين ينتج

$$س + \frac{ى}{٢} = \pm \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ} \text{ أو}$$

$$س = -\frac{ى}{٢} \pm \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ} \quad (١)$$

وهذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانية فى الحالة التى يكون مكرره الواحد وينطق به هكذا

مقدار المجهول بدرجة ثانية (فى الحالة التى يكون مكرره فيها الواحد) يساوى نصف مكرر المجهول بدرجة أولى بعد تغير اشارته زائدا أوناقصا الجذر التربيعى للكمية الناتجة من مربع هذا النصف مضافا اليه الكمية المعلومة بعد تغيير اشارتها.

وحيث ان للجذر فى قانون (١) اشارتين فيكون للمجهول س مقداران فاذا رمزلهما بحرفى سَ ، سً يكون

$$\text{سَ} = -\frac{\text{د}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{د}^٢}{٤} - \text{هـ}} \ ، \ \text{سً} = -\frac{\text{د}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{د}^٢}{٤} - \text{هـ}}$$

وبتطبيق هذا القانون على حل المعادلة

$$\text{س}^٢ + ٣\,\text{س} - ٢٨ = ٠$$ ينتج أن

$$\text{س} = -١,٥ \pm \sqrt{١,٥^٢ + ٢٨}$$ أى

$$\text{س} = -١,٥ \pm ٥,٥$$

واذا رمزلمقدارى المجهول بحرفى سَ ، سً ينتج

$$\text{سَ} = -١,٥ + ٥,٥ = ٤ \ ،$$

$$\text{سً} = -١,٥ - ٥,٥ = -٧$$

(٥٠٣) الصورة الثانية

$\text{ح}\,\text{س}^٢ + \text{د}\,\text{س} + \text{هـ} = ٠$ ولحلها نقسم حدودها على ح فيحدث

$\text{س}^٢ + \frac{\text{ء}}{\text{ح}} + \frac{\text{ه}}{\text{ح}} = ٠$. وبتطبيق القانون السابق على هذه المعادلة ينتج

$\text{س} = - \frac{\text{ء}}{٢\text{ح}} \pm \sqrt{\frac{\text{ء}^٢}{٤\text{ح}^٢} - \frac{\text{ه}}{\text{ح}}}$ وباجراء عملية الطرح فيما تحت الجذر ينتج

$\text{س} = - \frac{\text{ء}}{٢\text{ح}} \pm \sqrt{\frac{\text{ء}^٢ - ٤\text{ح}\text{ه}}{٤\text{ح}^٢}}$ وباخراج المقام من تحت علامة الجذر ينتج

$$\text{س} = \frac{-\text{ء} \pm \sqrt{\text{ء}^٢ - ٤\text{ح}\text{ه}}}{٢\text{ح}} \qquad (٢)$$

وهـذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانيـة فى حالة ماإذا كان مكرره غير الواحد وينطق به هكذا

مقدار المجهول بدرجة ثانيـة (فى الحالة التى يكون مكرره فيها غـير الواحد) يساوى كسرا اعتياديا بسطه مكرر المجهول بدرجة أولى بعد تغيير اشارته زائدا أوناقصا الجذر التربيعى للكمية الناتجة من مربع هذا المكرر مضافا اليـه أربعة أمثال حاصل ضرب مكرر المجهول بدرجة ثانية فى الكمية المعلومة بعـد تغيير اشارتها ومقامه ضعف مكرر المجهول بدرجة ثانية.

وبتطبيق هذا القانون على حل المعادلة

$٥\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٩٢ = ٠$ ينتج

$$\text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٤ \times ٥ \times ٩٢}}{٢ \times ٥}$$ أى

$$\text{س} = \frac{-\text{٣} \pm \text{٤٣}}{\text{١٠}}$$ واذا رمز لمقدارى المجهول بحرفى سَ ، سً ينتج $\text{سَ} = \frac{\text{٤٠}}{\text{١٠}} = \text{٤}$ ، $\text{سً} = -\frac{\text{٤٦}}{\text{١٠}} = -\text{٤٫٦}$

(٢٠١) حالة خصوصية ـ اذا كان مكرر المجهول بدرجة أولى زوجيا كما فى المعادلة $\text{ح س} + \text{٢ دَ س} + \text{ه} = \text{٠}$ التى فيها ٢ دَ بدلا عن د فى السابقة فانه يمكن اختصار القانون السابق اذ بتطبيقه على هذه المعادلة ينتج أن

$$\text{س} = \frac{-\text{٢ دَ} \pm \sqrt{\text{٤ دَ}^{\text{٢}} - \text{٤ ح ه}}}{\text{٢ ح}}$$

وبأخذ ٤ مضروبا مشتركا فيما تحت الجذر واخراجه ينتج

$$\text{س} = \frac{-\text{٢ دَ} \pm \text{٢} \sqrt{\text{دَ}^{\text{٢}} - \text{ح ه}}}{\text{٢ ح}}$$

وبقسمة حدى الكسر على ٢ ينتج

$$\text{س} = \frac{-\text{دَ} \pm \sqrt{\text{دَ}^{\text{٢}} - \text{ح ه}}}{\text{ح}} \qquad (\text{٣})$$

وهو قانون لمعادلة الدرجة الثانية فى هذه الحالة الخصوصة وعلى الطالب أن ينطق بهذا القانون قياسا على القانونين السابقين لتمرينه على التعبير اللفظى عن القوانين الجبرية

وبتطبيق هذا القانون على المعادلة $\text{٣ س}^{\text{٢}} - \text{٤ س} - \text{١٥} = \text{٠}$

ينتج

$$\text{س} = \frac{\text{٢} \pm \sqrt{\text{٤} + \text{٣} \times \text{١٥}}}{\text{٣}}$$ أو

$$\text{س} = \frac{\text{٢} \pm \sqrt{\text{٤٩}}}{\text{٣}}$$ ومنه

$$\text{سَ} = \frac{\text{٢}+\text{٧}}{\text{٣}} = \text{٣} \text{ ، } \text{سً} = \frac{\text{٢}-\text{٧}}{\text{٣}} = -\text{١}\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

(٢٠٣) تنبيه يمكن أن يكتفى فى الصورة الثانية (٢٠٠ ، ٢٠١) بقسمة حدود المعادلة على مكرر المجهول بدرجة ثانية وتطبيق القانون الاول السابق بنمرة ١٩٩

مثلا لحل المعادلة

$\text{٥ س}^{\text{٢}} + \text{٣ س} - \text{٩٢} = \text{٠}$ نقسم حدودها على ٥ فينتج

$\text{س}^{\text{٢}} + \text{٠,٦ س} - \text{١٨,٤} = \text{٠}$ وبتطبيق قانون (١) عليها ينتج

$\text{س} = -\text{٠,٣} \pm \sqrt{\text{٠,٣}^{\text{٢}} + \text{١٨,٤}}$ ومن هنا يؤخذ أن

$\text{سَ} = \text{٤} \text{ ، } \text{سً} = -\text{٤,٦}$ وهو عين ما تقدم بنمرة ٢٠٠

ولحل المعادلة $\text{٣ س}^{\text{٢}} - \text{٤ س} - \text{١٥} = \text{٠}$ نقسم حدودها على ٣ فينتج

$\text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{ س} - \text{٥} = \text{٠}$ وبتطبيق قانون (١) عليها ينتج

$\text{س} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \pm \sqrt{\frac{\text{٤}}{\text{٩}} + \text{٥}}$ ومن هنا يؤخذ أن

$\text{سَ} = \text{٣} \text{ ، } \text{سً} = -\text{١}\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ وهو عين ما تقدم بنمرة ٢٠١

ويستنتج من هذا أنه يمكن اعتبار الصورة الاولى لمعادلة الدرجة الثانيـة التامة صورة عموميـة وهى الصـورة المعتادة والاكثر استعمالا

(٢٠٣) تنبيـة يـلاحظ عنـد تطبيق القوانـين السابقـة على معادلات الدرجة الثانيـة أن تكون اشارة المجهول بدرجة ثانيـة موجبـة فان كانت سالبـة لزم تغيـير جميع اشارات المعادلة

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

(٢٧٠) $س^{٢} - ١٠س + ٩ = ٠$ (٢٧١) $س^{٢} - ٩س + ١٤ = ٠$

(٢٧٢) $س^{٢} - ١١س + ٢٤ = ٠$ (٢٧٣) $س^{٢} - ١٠س + ٢٤ = ٠$

(٢٧٤) $س^{٢} - س - ٢٠ = ٠$ (٢٧٥) $س^{٢} + ٦س - ٧٢ = ٠$

(٢٧٦) $س^{٢} + ٢س - ٣٥ = ٠$ (٢٧٧) $س^{٢} + ٧س - ٨ = ٠$

(٢٧٨) $س^{٢} + ١٢س + ٢٧ = ٠$ (٢٧٩) $س^{٢} + ١٢س + ٢٠ = ٠$

(٢٨٠) $٣س^{٢} - ٥س - ٢ = ٠$ (٢٨١) $٥س^{٢} + ٣س - ٥٤ = ٠$

(٢٨٢) $٨س^{٢} - ١٧س - ١١٥ = ٠$ (٢٨٣) $٦س^{٢} - س - ١ = ٠$

(٢٨٤) $٩س^{٢} + ٥س - ١٤ = ٠$ (٢٨٥) $١١س^{٢} + ٢س - ٤٨ = ٠$

(٢٨٦) $٧س^{٢} - ٤س - ٥١ = ٠$ (٢٨٧) $٥س^{٢} + ٦س - ١٠٤ = ٠$

(٢٨٨) $3\text{س}^2 - 18\text{س} + 15 = 0$ (٢٨٩) $9\text{س}^2 + 10\text{س} + 384 = 0$

(٢٩٠) $\text{س}^2 - \frac{5}{6}\text{س} + \frac{1}{6} = 0$ (٢٩١) $\frac{3}{4}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س} - 25 = 0$

(٢٩٢) $\frac{5\text{س}+7}{\text{س}-1} = 3\text{س} + 2$ (٢٩٣) $\frac{5\text{س}-1}{\text{س}+1} = \frac{3\text{س}}{2}$

(٢٩٤) $\frac{3\text{س}-8}{\text{س}-2} = \frac{5\text{س}-2}{\text{س}+5}$ (٢٩٥) $\frac{3\text{س}-1}{4\text{س}+7} = 1 - \frac{6}{\text{س}+7}$

(٢٩٦) $\frac{4}{\text{س}-1} - \frac{5}{\text{س}-2} = \frac{3}{\text{س}}$ (٢٩٧) $\frac{1}{\text{س}+1} - \frac{1}{\text{س}-3} = \frac{6}{35}$

(٢٩٨) $$\frac{\sqrt{\text{س}+2}}{4+\sqrt{\text{س}}} = \frac{4-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$$

(٢٩٩) $$\sqrt{\text{س}} + 3\sqrt{\text{س}+11} = 23$$

مسائل محلولة تطبيقا على معادلات الدرجة الثانية التامة

(٣٠٤) المسئلة الاولى ــ سمسار اشترى أطيانا بمبلغ ١٨٧٥ جنيه حفظ منها ١٥ فدانا وباع الباقى بمبلغ ١٧٤٠ جنيه رابحا ٤ جنيهات فى كل فدان باعه فكم فدانا اشترى

الحل نرمز لعدد الافدنة التى اشتراها بحرف س فيكون ماباعه $\text{س} - 15$ ويكون ثمن الفدان فى حالة الشراء هو $\frac{1875}{\text{س}}$ وثمن الفدان فى حالة البيع $\frac{1740}{\text{س}-15}$ وحيث انه ربح ٤ جنيهات فى الفدان تحدث المعادلة

$\frac{1875}{\text{س}} + 4 = \frac{1740}{\text{س}-15}$ وبحل هذه المعادلة يحدث

$$\text{س} = \frac{-75+675}{8}$$

ومن هنا يؤخذ أن $س' = ٧٥$ ، $س'' = -٩٣,٧٥$
وبالنظر للمقدار الاول يعلم أن عدد الافدنة التى اشتراها ٧٥ فدانا ويكون ثمن الفدان ٣٥ جنيها وأما المقدار الثانى فلا يوافق المسئلة

(٢٠٥) المسئلة الثانيـة شخص اشترى جملة ياردات من الحرير بمبلغ ٥ جنيهات انجليزيه ولو أخذ بهذا المبلغ عينه من حرير آخر ينقص ثمن اليادره منه شلنا لاخذ خمس ياردات زيادة عما اشترى فما عدد الياردات التى اشتراها

الحل نرمز لعدد الياردات التى اشتراها بحرف س فيكون ثمن اليارده $\frac{١٠٠}{س}$ شلنا وحيث انه لوأخذ من حرير آخر ثمن اليارده منه أقل من الاول بشلن يأخذ خمس ياردات زيادة فيكون ثمن اليادره من الحرير الثانى $\frac{١٠٠}{س+٥}$ وحيث ان ثمن اليارده فى هذه الحالة ينقص شلنا واحد عما اشترى فتحدث المعادلة

$$\frac{١٠٠}{س+٥} + ١ = \frac{١٠٠}{س}$$ وبحل هذه المعادلة نجد

$$س = -٢,٥ \pm ٢٢,٥$$ ومن هنا يؤخذ أن

$$س' = ٢٠ \text{ ، } س'' = -٢٥$$

أعنى أن عدد الياردات التى اشتراها هو ٢٠ ياردة أما المقدار الثانى فلا يوافق المسئلة

(٢٠٦) المسئلة الثالثـة صانعان اشتغلا باجرة يوميـة مختلفة أخذ الاول $\frac{ح}{٣٨٤}$ وأخـذ الثانى $\frac{ح}{٢١٦}$ وكانت أيام شغل الثانى أقل من أيام شغل الاول بستة أيام ولكن لواشتغل الثانى بقدر أيام الاول

واشتغل الاول بقدر أيام الثانى لاخذا أجرتين متساويتين فما عدد أيام شغل كل منهما وكم أجرته اليوميه

الحل نفرض أن أيام الاول $س$ فتكون أيام الثانى $س - ٦$ وتكون الاجرة اليومية للاول $\frac{٣٨٤}{س}$ والاجرة اليومية للثانى $\frac{٢١٦}{س-٦}$ واذا اشتغل الاول بقدر أيام الثانى تكون أجرته فى هذه الايام $\frac{٣٨٤}{س}(س - ٦)$ واذا اشتغل الثانى بقدر أيام الاول تكون أجرته فى هذه الايام $\frac{٢١٦}{س-٦}س$ وحيث ان فى هذه الحالة تكون الاجرتان متساويتين تحدث المعادلة

$$\frac{٣٨٤(س-٦)}{س} = \frac{٢١٦س}{س-٦}$$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$$س = \frac{١٩٢ \pm ١٤٤}{١٤}$$

ومن هنا يؤخذ أن $س' = ٢٤$ ، $س'' = \frac{٢٤}{٧}$ وبالنظر للمقدار الاول يكون أيام شغل الصانع الاول ٢٤ وأجرته اليومية $\frac{ص}{١٦}$ وأيام شغل الصانع الثانى ١٨ وأجرته اليومية $\frac{ص}{١٢}$ وأما المقدار الثانى $\frac{٢٤}{٧}$ فلا يوافق المسئلة

(٢٠٧) المسئلة الرابعة اذا سار قطر سكة حديد خمسة كيلو مترات زيادة عن سرعته الاصلية فانه يقطع ٢١٠ كيلومتر فى زمن أقل بساعة عما اذا سار بسرعته الاصلية ففى كم ساعة يقطع هذه المسافة بالسرعة الاصلية

الحل نرمز لعدد الساعات التى يقطع فيها هذه المسافة بالسرعة

الاصلية بحرف س فتكون سرعته فى الساعة $\frac{٢١٠}{س}$ وتكون سرعته فى الساعة فى الحالة الثانية $\frac{٢١٠}{س} + ٥$ وحيث انه يقطع الطريق فى هذه الحالة فى مدة أقل من الاولى بساعة واحدة فيقطعها فى (س − ١) ساعة واذا ضرب ما يقطعه فى الساعة فى عدد الساعات يكون الحاصل دالا على طول الطريق وحينئذ فحدث المعادلة

$\left(\frac{٢١٠}{س} + ٥\right)\left(س - ١\right) = ٢١٠$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$س = ٠٫٥ \pm ٦٫٥$

ومن هنا أن سَ = ٧ ، سً = − ٦ . وبالنظر للمقدار الاول يعلم أنه يقطع هذه المسافة فى ٧ ساعات بالسرعة الاولى وعلى هذا فيقطعها فى ٦ ساعات بالسرعة الثانية وأما المقدار الثانى فلا يوافق المسئلة

مسائل على الدرجة الثانية يطلب حلها

(٣٠٠) استأجر اخوة عربة بمبلغ ٦٠ مليما وعند الشروع فى الركوب حضر اثنان من أصحابهم فركبوا معهم ووزعت الاجرة عليهم جميعا و بذلك نقص ما كان يدفعه كل واحد من الاخوة ثمانية ملليمات فكم عدد الاخوة

(٣٠١) رجل يمكنه أن يقطع ١٠٨ أميال فى مدة معينة ووجد أنه يمكنه أن يوفر من تلك المدة ٤٫٥ ساعات اذا زاد على سرعته ميلين فى الساعة فما سرعته الاصلية

(٣٠٢) صبى اشترى بيضا بقرش واحد فكسر ٣ بيضات فى الطريق وبذلك ارتفع ثمن كل ست بيضات مليما واحدا عن ثمن السوق فكم بيضة أخذت بالقرش

(٣٠٣) أراد محسن أن يتصدق بمبلغ $\frac{جـ}{٣٠}$ على جملة فقراء وبعد تعين نصيب كل منهم حضر ثلاثة فقراء آخرون فأدخلهم فى التقسيم وبهذه الواسطة نقص ما كان خصصه لكل واحد $\frac{جـ}{٥}$ فكم عدد الفقراء الاول

(٣٠٤) ا ، ب محطتا سكة حديد بينهما ٣٠٠ ميل قام فى وقت واحد من كل منهما قطر قاصدا الاخرى فتقابل القطران وبعد ٤ ساعات من تقابلهما وصل القائم من ب الى ا وبعد ٩ ساعات من التقابل أيضا وصل القائم من ا الى ب فما سرعة كل منهما فى الساعة

(٣٠٥) بلغت مصاريف قضية بين أشخاص متضامنين ١٠٠ جنيه فالزموا بدفع هذا المبلغ ولعسر ثلاثة منهم دفع كل من الباقين ٧و٥ جنيه زيادة عما كان يلزم أن يدفعه فما عدد المتضامنين

(٣٠٦) شخص وضع ١٠٠٠٠ جنيه فى تجارة مدة سنة ثم أخذ ما وضعه وأرباحه ووضعه فى تجارة أخرى مدة سنة وقد علم أن ربحه فى هذه السنة يزيد واحدا فى المائة عن ربح السنة الاولى فكم كان ربح المائة فى أول سنة

(٣٠٧) حوض يملأ بحنفيتين معا فى $\frac{١}{٢}$ ٢٢ دقيقة والكبرى تملؤ فى زمن أقل من الصغرى بمقدار ٢٤ دقيقة والمطلوب معرفة

لوقت الكافى لمائه بكل واحـدة منهما

(٣٠٨) ح ، ء محطتان بينهما ٢٤٠ ميلا قام قطر ا من ح وبعد ساعة قام قطر ب من ح أيضا وبعد ساعتين وصل الى نقطة مر عليها ا منذ ٤٥ دقيقة فزبدت سرعته خمسة أميال فى الساعة وبذلك لحق ب القطر ا وقت وصوله محطة ء فما السرعة التى قام بها كل منهما من ح

(٣٠٩) شخص اشترى مقدارا من البرتقال بمبلغ ٢٠٠ مليم فتلف منه ٥٠ برتقالة وباع كل برتقالة من الباقى بثمن يزيد عن ثمنها الاصلى $\frac{٣}{٨}$ مليم وبذلك ربح ٧٠ مليما فكم عدد البرتقال الذى اشتراه

(٣١٠) غيط مستطيل الشكل محيطه ٥٠٠ ياردة ومساحته ١٤٤٠٠ ياردة مربعة فما مقدار ضلعه

(٣١١) محيط مربع يزيد عن مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة الاكبر تزيد عن مساحة الاصغر ٣٢٥ قدما مربعا فما ضلع كل منهما

(٣١٢) فى وسط قطعة أرض مربعة الشكل قصر مربع الشكل وحول هذا القصر ممشى من الحصاء عرضها أربعة أمتار وحول هذا الممشى زرع عرضه ٦ أمتار فاذا كان مساحة القصر والزرع ٧٢١ مترا مربعا فمامساحة القصر

(٣١٣) المطلوب ايجاد ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بحيث تكون مقادير أضلاع مثلث قائم الزاوية

(٣١٤) المعلوم مستقيم ح والمطلوب تقسيمه الى قسمة ذات وسط وطرفين أى الى قسمين أكبرهما يكون وسطا متناسبا بين المستقيم الكلى والجزء الاصغر ثم ايجاد المقدار الرقمى للناتج بفرض ح يساوى ٣٠ مترا

(٣١٥) المطلوب ايجاد القانون الذى يحسب به نصف قطر احدى قاعدتى مخروط ناقص بعد معرفة حجمه ونصف قطر القاعدة الاخرى والارتفاع

مناقشة المعادلة ذات الدرجة الثانية

(٢٠٨) تقدم بنمرة ٢٠٢ أن معادلات الدرجة الثانية يمكن أن تأخذ صورة عمومية واحدة وهى $س^٢ + ى\,س + ح = ٠$ التى منها

$$س = -\frac{ى}{٢} \pm \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - ح}$$

ولمناقشة هذا القانون يقال انه يمكن أن يعتبر فيه ثلاث حالات

(الحالة الاولى) اذا كانت الكمية التى تحت علامة الجذر وهى $\frac{ى^٢}{٤} - ح > ٠$ أى موجبة يكون الجذران حقيقيين ومختلفى المقدار ويدخل تحت ذلك ثلاث صور

الصورة الاولى اذا كان $ح > ٠$ أى موجبة تكون تحت الجذر سالبة ويكون

$$\frac{ى^٢}{٤} - ح < \frac{ى^٢}{٤} \quad \text{ومنه} \quad \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - ح} < \frac{ى}{٢}$$

ويكون مقدارا س فى هذه الحالة بعلامة $-\frac{ى}{٢}$ يعنى يكون له

مقداران مختلفان بعلامة واحدة مخالفا لعلامة ى في المعادلة

الصورة الثانية اذا كان ح = ٠ يكون

$$\sqrt{\frac{ى^2}{4} - ح} = \frac{ى}{2}$$

ويكون مقدارا س هما $- \frac{ى}{2} \pm \frac{ى}{2}$ ومنه يكون $س' = ٠$ ، $س'' = - ى$

يعنى أن للمجهول مقدارين أحدهما صفر والثانى يساوى مكرر س بعلامة مخالفة لعلامته

الصورة الثالثة اذا كان ح > ٠ أى سالبة تكون تحت الجذر موجبة ويكون

$$\frac{ى^2}{4} - ح > \frac{ى^2}{4} \text{ ومنه } \sqrt{\frac{ى^2}{4} - ح} > \frac{ى}{2}$$

ويكون مقدارا س فى هذه الصورة بعلامة الجذر يعنى يكون له مقداران مختلفان بعلامتين مختلفتين وزيادة على ذلك فان أكبرهما فى القيمة المطلقة تكون علامته مخالفة لعلامة ى فى المعادلة

(الحالة الثانية) اذا كانت الكمية التى تحت الجذر وهى $\frac{ى^2}{4} - ح = ٠$ أى معدومة يكون الجذران حقيقيين ومتساويين يعنى ان يمحى ما تحت علامة الجذر ويكون $س = - \frac{ى}{2} \pm ٠$ ومنه يكون $س' = - \frac{ى}{2}$ ، $س'' = - \frac{ى}{2}$

ومن ذلك يلاحظ أنه كلما كان المجذور $\frac{ى^2}{4} - ح > ٠$ أى غير معدوم كان الجذران مختلفين عن بعضهما وهما يميلان الى نهاية

واحدة متى مال $\frac{د^{2}}{٤} - ح$ الى الصفر وهذه النهاية هى $-\frac{د}{٢}$

(الحالة الثالثة) اذا كان الجذور $\frac{د^{2}}{٤} - ح < ٠$ أى سالبا يكون الجذران تخيليين لانه لما كان المقدار الذى تحت الجذر سالبا فلا يمكن استخراجه ولهذا يكون الجذران تخيليين

الارتباط بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومكرراتها

(٢٠٩) تقدم أن كل معادلة ذات درجة ثانية يمكن أن توضع على هذه الصورة

$$س^{2} + د\,س + ه = ٠$$

وأنه اذا رمز لمقدار المجهول بحرفى $س'$ و $س''$ يكون

$$س' = -\frac{د}{٢} \pm \sqrt{\frac{د^{2}}{٤} - ه} \quad ،$$

$$س'' = -\frac{د}{٢} - \sqrt{\frac{د^{2}}{ه} - ه}$$

فأولا اذا جمع هذان المقداران على بعضهما ينتج

$$س' + س'' = -د$$

أعنى أن مجموع جذرى معادلة الدرجة الثانية يساوى مكرر المجهول بدرجة أولى مع تغير اشارته

وثانيا اذا ضرب المقداران السابقان فى بعضهما ينتج

$$س'س'' = \left(-\frac{د}{٢} + \sqrt{\frac{د^{2}}{٤} - ه}\right)\left(-\frac{د}{٢} - \sqrt{\frac{د^{2}}{٤} - ه}\right)$$

وحيث ان الطرف الثانى هو عبارة عن حاصل ضرب مجموع كيتين فى تفاضلهما فيساوى الفرق بين مربعيهما أعنى يكون

$$س' س'' = \frac{د^٢}{٤} - \left(\frac{د^٢}{٤} - هـ \right) = هـ$$

أعنى أن حاصل ضرب جزرى المعادلة يساوى الكمية المعلومة

(٢١٠) تنبيه اذا كانت معادلة الدرجة الثانية بالصورة $ح س^٢ + د س + هـ = ٠$ فيسهل أن يرى مباشرة أن مجموع الجذرين $= -\frac{د}{ح}$ ، حاصل ضربهما $= \frac{هـ}{ح}$

(٢١١) نتيجة أولى يمكن بواسطة ماتقدم معرفة اشارة جذرى معادلة الدرجة الثانية قبل حلها ولذلك يقال حيث ان $س' \times س'' = هـ$ ، $س' + س'' = -د$ فاذا كان هـ موجبا علم أن اشارتى المضروبين س' ، س'' من نوع واحد ونوع الاشارتين يخالف اشارة د لان مجموعهما يخالف تلك الاشارة

وأما اذا كان هـ سالبا فتكون الاشارتان مختلفتين وتكون اشارة أكبرهما فى المقدار المطلق مخالفة لاشارة د

مثال (١) لمعرفة اشارتى جذرى المعادلة

$$س^٢ - ٧ س + ١٠ = ٠$$

يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى ١٠ وهو موجب فيكونان متحدى الاشارة وحيث أن مجموعهما يساوى ٧ فيكونان موجبين

مثال (٢) لمعرفة جذرى المعادلة $س^٢ + ٥ س - ٢٤ = ٠$

يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى -٢٤ وهو

سالب فيكونان مختلفى الاشارة وحيث ان مجموعهما يساوى — ٥ فيكون المقدار المطلق لأكبرهما سالبا وقس على هـذا

(٢١٢) نتيجة ثانيـة يمكن بواسطة ما تقـدم تكوين معادلة الدرجـة الثانية بعد معرفة جـذريها

مثال أول اذا كان جذرا معادلة هما سَ = ٥ ، سً = ٨

يكون سَ + سً = ٥ + ٨ = ١٣ ، سَ سً = ٥ × ٨ = ٤٠ وحينئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى هو — ١٣ والكمية المعلومة هى ٤٠ وتكون المعادلة هى

س٢ — ١٣ س + ٤٠ = ٠

مثال ثان اذا كان سَ = ٣ + √٥ ، سً = ٣ — √٥ يكون

سَ + سً = ٣ + √٥ + ٣ — √٥ = ٦ ،

سَ سً = (٣ + √٥) (٣ — √٥) = ٩ — ٥ = ٤

وحينئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى — ٦ والكمية المعلومة ٤ وتكون المعادلة

س٢ — ٦ س + ٤ = ٠

مثال ثالث — اذا كان سَ = ٥ + ٣ √—١ ، سً = ٥ — ٣ √—١ يكون

سَ + سً = ٥ + ٣ √—١ + ٥ — ٣ √—١ = ١٠ ،

$$س^{\prime}\, س^{\prime\prime} = (٥ + ٣\sqrt{-١})(٥ - ٣\sqrt{-١})$$

$$= ٢٥ + ٩ = ٣٤$$

ويكون مكرر المجهول بدرجة أولى -١٠ والكمية المعلومة ٣٤ وتكون المعادلة

$$س^{٢} - ١٠\, س + ٣٤ = ٠$$

(٢١٣) نتيجة ثالثة ـ اذا علم مجموع عددين وحاصل ضربهما يمكن أن توضع معادلة ذات درجة ثانية يكون جذراها العددين المذكورين

مثلا اذا كان مجموع عددين ١٦ وحاصل ضربهما ٦٣ فيكون العددان المطلوبان هما جذرا معادلة ذات درجة ثانية فيها مكرر المجهول بدرجة أولى -١٦ والكمية المعلومة ٦٣ وحينئذ فتوضع المعادلة

$$س^{٢} - ١٦\, س + ٦٣ = ٠$$ وبحلها يوجد

$$س = ٨ \pm \sqrt{٦٤ - ٦٣}$$ أى

$$س^{\prime} = ٩ \;،\; س^{\prime\prime} = ٧$$

أى أن العددين المطلوبين هما ٩ ، ٧

تمارين

بين علامتى جذرى كل واحدة من المعادلات الآتية بدون حلها

(٣١٦) $س^{٢} - ٦س + ٥ = ٠$ (٣١٧) $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$

(٣١٨) $س^{٢} - ٨س + ١٦ = ٠$ (٣١٩) $س^{٢} - ٨س + ٢٠ = ٠$

(٣٢٠) ٦س٢ − ١٣س + ٦ = ٠ (٣٢١) ٣س٢ − ٤س − ٤ = ٠.

(٣٢٢) ٩س٢ − ١٢س + ٤ = ٠ (٣٢٣) ٢س٢ − ٥س + ٧ = ٠

المطلوب تكوين معادلات الدرجة الثانية التى جذورها الكميات الآتية

(٣٢٤) ٢ ، ٣ (٣٢٥) ٤ ، ٧

(٣٢٦) ٠,٥ ، − ٣ (٣٢٧) − ٣ ، − ٧

(٣٢٨) ٢ + √٣ ، ٢ − √٣ (٣٢٩) ٥ + √٢ ، ٥ − √٢

(٣٣٠) ٢ + √−١ ، ٢ − √−١

(٣٣١) − ١ + ٢√−١ ، − ١ − ٢√−١

(٣٣٢) ما هما العددان اللذان مجموعهما ١٥ وحاصل ضربهما ٥٤

(٣٣٣) ما هما العددان اللذان مجموعهما − ١٩ وحاصل ضربهما ٩٠

(٣٣٤) اقسم ٦٠ الى جزئين بحيث يكون حاصل ضربهما ٨٩٩

(٣٣٥) ماهو العدد القاسم الى ٣٦ بحيث يكون مجموع المقسوم عليه والخارج ١٥

(٣٣٦) ما بعدا المستطيل الذى محيطه ٢٨ قدما ومساحته ٤٥ قدما مربعا

المعادلات المضاعفة التربيع

(٢١٤) تعريف − المعادلة المضاعفة التربيع هى معادلة

ذات درجة رابعة لا تحتوى على المجهول بأس فردى مثل المعادلة $س^٤ + ى س^٢ + هـ = ٠$

(٢١٥) حل المعادلة المضاعفة التربيع — لحل المعادلة $س^٤ + ى س^٢ + هـ = ٠$.

نفرض أن $س^٢ = ص$ فيكون $س^٤ = ص^٢$ وتؤول المعادلة الى $ص^٢ + ى ص + هـ = ٠$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$$ص = -\frac{ى}{٢} \pm \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ} \quad (١)$$

وحيث ان $ص = س^٢$ فبوضعه بدله يحدث

$س^٢ = -\frac{ى}{٢} \pm \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ}$ وبأخذ جذر الطرفين يحدث

$$س = \pm\sqrt{-\frac{ى}{٢} \pm \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ}}$$

وهذا هو القانون العام للمعادلة المضاعفة التربيع ومنه يؤخذ أن للمجهول س أربعة مقادير فاذا رمز لها بالحروف $س'$ ، $س''$ ، $س'''$ ، $س''''$ يحدث

$$س' = \sqrt{-\frac{ى}{٢} + \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ}} ، \quad س'' = \sqrt{-\frac{ى}{٢} - \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ}} ،$$

$$س''' = -\sqrt{-\frac{ى}{٢} + \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ}} ، \quad س'''' = -\sqrt{-\frac{ى}{٢} - \sqrt{\frac{ى^٢}{٤} - هـ}}$$

مثال — لحل المعادلة $س^٤ - ٥ س^٢ + ٤ = ٠$

نستعمل القانون السابق فيحدث

$س = \pm\sqrt{٢{,}٥ \pm \sqrt{٦{,}٢٥ - ٤}}$ ومنه يكون

$$س' = ٢ ، \quad س'' = ١ ، \quad س''' = -٢ ، \quad س'''' = -١$$

وكل منها يحقق المعادلة

(٣١٦) تنبيه ـ اذا كان جذرا المعادلة (١) حقيقيين وايجابيين تكون هذه المقادير كلها حقيقية واذا كان أحد جذرى المعادلة المذكورة ايجابيا والآخر سلبيا يكون اثنان من هذه المقادير حقيقيين واثنان تخيليين واذ كانا سلبيين تكون هذه المقادير كلها تخيلية

(٣١٧) تنبيه اذا كان للمجهول بدرجة رابعة مكرر غير الواحد كما فى المعادلة

$$ح س^{٤} + ى س^{٢} + هـ = ٠$$

فاما أن نقسم جميع حدودها على ح ونجرى العمل كما فى النمرة السابقة واما أن نفرض فى هذه المعادلة مباشرة أن $س^{٢}$ = ص ويكون $س^{٤}$ = $ص^{٢}$ وتؤول المعادلة المفروضة الى معادلة ذات درجة ثانية بالصورة التى للمجهول بدرجة ثانية مكرر غير الواحد وتحل كما تقدم بنمرة ٢٠٠

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية

(٣٣٧) $س^{٤} - ١٣ س^{٢} + ٣٦ = ٠$

(٣٣٨) $س^{٤} - ٤١ س^{٢} + ٤٠٠ = ٠$

(٣٣٩) $٤ س^{٤} - ٥ س^{٢} + ١ = ٠$

(٣٤٠) $س^{٤} - ١٠ س^{٢} + ٩ = ٠$

(٣٤١) $س^{٤} - ٣٥ س^{٢} - ٣٦ = ٠$

(٣٤٢) $س^{٤} - ٤٥ س^{٢} - ١٩٦ = ٠$

(٣٤٣) س^{٤} − ٢ س^{٢} − ٢٣ = ٠

(٣٤٤) ٨ س^{٤} + ٢٠ س^{٢} − ٥٫٥ = ٠

(٣٤٥) س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٣٦ = ٠

(٣٤٦) ٦ س^{٤} − ٦ س^{٢} + ٧ = ٠

(٣٤٧) ابحث عن أساس العدية التى يكتب بها العدد ١٢٥٥١ مبينا بالوضع ٣٠٤٠٧

معادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

(٢١٨) معادلة الدرجة الثانية ذات المجهولين يمكن أن تحتوى على كل منهما بدرجة ثانية وبدرجة أولى وعلى حاصل ضربهما وعلى كمية معلومة ـ مثل

ا س^{٢} + ب ص + ح س + ء ص + هـ س ص + و = ٠

وكل من المقادير ا و ب و ح و ء و هـ و و قد يكون حدا واحدا أو كمية ذات حدود موجبا أو سالبا وقد يكون بعضها معدوما

(٢١٩) مجموعة معادلتين بدرجة ثانية ـ قد تحتوى هذه المجموعة على معادلة بدرجة ثانية وأخرى بدرجة أولى وقد تحتوى على معادلتين كل منهما بدرجة ثانية

(٢٢٠) قاعدة ـ لحل مجموعة معادلتين بمجهولين احداهما بدرجة ثانية والاخرى بدرجة أولى تتبع طريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى

مثلا بحل المجموعة

س² + ٥ س ص − ٢ ص² + ٣ س − ٢٢ = ٠ (١)

٧ س − ص = ١١ (٢)

نستخرج مقدار ص من معادلة (٢) فنجد ص = ٧ س − ١١ ثم نضع هذا المقدار بدلا عن ص فى معادلة (١) فيحدث

س² + ٥ س (٧ س − ١١) − ٢ (٧ س − ١١)² + ٣ س − ٢٢ = ٠ ثم نحذف الاقواس ونختصر الحدود المتشابهة فيحدث

٦٢ س² + ٢٥٦ س − ٢٦٤ = ٠ وبحل هذه المعادلة يحدث

س′ = ٢ ٤/٣١ ، س″ = ٢

فاذا وضع بدلا عن س المقدار الاول ٢ ٤/٣١ فى معادلة (٢) ينتج أن ص = ٣ ١٨/٣١ واذا وضع بدلا عن س المقدار الثانى ٢ فى تلك المعادلة ينتج أن ص = ٣

(٢٢١) حل مجموعات خصوصية بدرجة ثانية ومجهولين — يمكن حل بعض مجموعات بدرجة ثانية ومجهولين فى أحوال خصوصية بطرق تحليلية كثيرة الاستعمال وأهمها ايجاد مقدارى المجهولين بواسطة تكوين معادلة ذات درجة ثانية من مجموع كميتين وحاصل ضربهما (واليك بيانها)

(٣٢٢) الحالة الاولى ـ اذا أريد حل المجموعة

س + ص = ١٠ (١)

س ص = ٢٤ (٢)

يشاهد مباشرة أن مقداري س وص هما جذرا معادلة بدرجة ثانية (٢١٣) فاذا رمز لمجهولها بحرف ع يحدث

ع^٢ — ١٠ ع + ٢٤ = ٠ وبحلها نجد

ع = ٥ ± ١

ويكون أحد الجذرين هو مقدار س والآخر مقدار ص أي س = ٦ ، ص = ٤ أو بالعكس

(٣٢٣) الحالة الثانية ـ لحل المجموعة س — ص = ٢ (١)

س ص = ٢٤ (٢)

نعتبر أن المجهولين هما س ، — ص فيكون مجموعهما س + (— ص) = ٢ وحاصل ضربهما س × — ص = ٢٤

ويكون س ، — ص هما جذرا المعادلة

ع^٢ — ٢ ع + ٢٤ = ٠ وبحلها نجد

ع = ١ ± ٥

ويكون أحد الجذرين هو مقدار س والثاني مقدار — ص فاما أن يكون س = ٦ ، — ص = — ٤ وبناء عليه يكون ص = ٤ واما أن يكون س = — ٤ ، — ص = ٦ فيكون ص = — ٦ والتحقيق واضح

(٢٢٤) الحالة الثالثة ـ حل المجموعة

$س^٢ + ص^٢ = ١٣$ (١)

$س + ص = ٥$ (٢)

نربع طرفى المعادلة الثانية فيحدث

$س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص = ٢٥$ (٣)

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة ٣ فيحدث

$٢ س ص = ١٢$ أو $س ص = ٦$ (٤)

فاذا كونت مجموعة من معادلتى ٢ ، ٤ يشاهد أنه قد علم مجموع كميتين وحاصل ضربهما فيكون مقدارا س ، ص هما جذرا المعادلة

$ع^٢ - ٥ ع + ٦ = ٠$ (٥) وبحلها يحدث

$ع = ٢,٥ \pm ٠,٥$

ويكون أحد الجذرين مقدار س والآخر مقدار ص أى $س = ٣$ ، $ص = ٢$ أو بالعكس

(٢٢٥) الحالة الرابعة ـ لحل المجموعة $س^٢ + ص^٢ = ١٣$ (١)

$س - ص = ١$ (٢)

نربع طرفى المعادلة (٢) فينتج $س^٢ + ص^٢ - ٢ س ص = ١$ (٣)

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣) فينتج

$- ٢ س ص = - ١٢$ أو $- س ص = - ٦$ (٤)

فاذا كونت مجموعة من معادلتى (١) ، (٤) واعتبر أن

المجهولين س ، $-\text{ص}$ كان مجموعهما يساوى ١ وحاصل ضربهما يساوى ـ ٦ ويكون مقدارا س ، ص هما جذرا المعادلة

$\text{ع}^{\text{٢}} - \text{ع} - \text{٦} = \text{٠}$ (٥) وبحل هذه المعادلة نجد

$\text{ع} = \text{٠٫٥} \pm \text{٢٫٥}$ أى $\text{ع}' = \text{٣}$ ، $\text{ع}'' = -\text{٢}$

ويكون أحد الجذرين مقدار س والآخر مقدار $-\text{ص}$ فاما أن يكون $\text{س} = \text{٣}$ ، $-\text{ص} = -\text{٢}$ وبناء عليه يكون $\text{ص} = \text{٢}$ واما أن يكون $\text{س} = -\text{٢}$ ، $-\text{ص} = \text{٣}$ وبناء عليه يكون $\text{ص} = -\text{٣}$

(٢٢٦) الحالة الخامسة ـ اذا أريد حل المجموعة

$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{ص}^{\text{٢}} = \text{٢٠} \quad \text{(١)}$$

$$\text{س} + \text{ص} = \text{١٠} \quad \text{(٢)}$$

يلاحظ أن معادلة (١) يمكن أن تكتب هكذا $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = \text{٢٠}$ (٣) وبقسمة طرفى هذه المعادلة على طرفى معادلة (٢) ينتج $\text{س} - \text{ص} = \text{٢}$ (٤)

ثم يكون من معادلتى (١) ، (٤) مجموعة بحلها نجد $\text{س} = \text{٦}$ ، $\text{ص} = \text{٤}$

(٢٢٧) تنبيه يمكن حل هذه المجموعات المخصوصية بطريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى

(٢٢٨) حل مجموعة معادلتين كلاهما بدرجة ثانية ـ نحل

هذه المجموعة بطريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى غير أنه بعد حذف أحد المجهولين اذ لم نتوصل الى معادلة من المعادلات التى سبق الكلام على حلها (كأن وجدت بدرجة رابعة واشتملت على المجهول بدرجات ثالثة وثانية وأولى) فلا يمكن الحل بواسطة ما تقدم وانما تحل بواسطة قواعد مقرره فى علم الجبر العالى

المثال الاول — اذا أريد حل المجموعة

$$٢ س^٢ + ٣ ص^٢ = ٧٧ \quad (١)$$

$$٣ س^٢ - ص^٢ = ٦٦ \quad (٢)$$

نحذف المجهول ص بطريقة الجمع أو الطرح فينتج $١١ س^٢ = ٢٧٥$ ومنها $س = \pm ٥$

فاذا وضع بدلا عن س مقداره وهو ٥ فى معادلة (١) ينتج

$$٥٠ + ٣ ص^٢ = ٧٧ \quad (٣) \quad \text{ومنها } ص = \pm ٣$$

فيكون $س = ٥$ ، $ص = ٣$ أو $س = ٥$ و $ص = - ٣$

واذا وضع بدلا عن س مقداره الثانى − ٣ فى معادلة (١) ينتج المعادلة (٣) عينها ويكون $س = - ٥$ ، $ص = ٣$

أو $س = - ٥$ ، $ص = - ٣$

المثال الثانى اذا أريد حل المجموعة

$$س^٢ + ص^٢ - ٣ س ص + س - ص + ٦ = ٠ \quad (١)$$

$$٢ س^٢ + ٣ ص^٢ + ٥ س ص - س + ٢ ص - ٦٩ = ٠ \quad (٢)$$

نضرب طرفى معادلة (١) فى ٣ ثم نطرح من الناتج معادلة (٢)

فينتج $س^{٢} - ١٤ س ص + ٤ س - ٥ ص + ٨٧ = ٠$ (٣)
ثم نستخرج من هذه المعادلة مقدار ص بفرض أن س معلوم فينتج
$ص = \frac{س^{٢} + ٤ س + ٨٧}{١٤ س + ٥}$ (٤) ثم نستعيض المجهول ص فى معادلة (١) بمقداره من معادلة (٤) فينتج

$$س^{٢} + \left(\frac{س^{٢} + ٤ س + ٨٧}{١٤ س + ٥}\right)^{٢} - \frac{٣ س (س^{٢} + ٤ س + ٨٧)}{١٤ س + ٥} + س - \frac{س^{٢} + ٤ س + ٨٧}{١٤ س + ٥} + ٦ = ٠$$

وبحذف المقامات والاختصار يحدث

$$١٠٠ س^{٤} + ١٤٧ س^{٣} - ٢٢٤٤ س^{٢} - ٩٨٢ س + ٧٢٨٤ = ٠ \quad (٥)$$

وحيث ان هذه المعادلة (٥) بدرجة رابعة ومشتملة على المجهول س بدرجات ثالثة وثانية وأولى فلا يمكن حلها بواسطة ما تقدم من القواعد

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية

(٣٤٨) $س + ص = ٥,٧$ ، $س ص = ١٤$ (٣٤٩) $٥ س + ٤ ص = ٢٢$ ، $س ص = ٦$

(٣٥٠) $س - ص = ٢$ ، $س ص = ٦٣$ (٣٥١) $٢ س - ص = ٥$ ، $س ص = ٤٢$

(٣٥٢) $٣ س - ٢ ص = ٠$ ، $س ص = ١٣,٥$ (٣٥٣) $٢ س - ٢ ص = ١١$ ، $س ص = ٣$

(٣٥٤) $س + ص = ٧$ (٣٥٥) $٢س + ٣ص = ١٤$

$س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١٤٨$

(٣٥٦) $س - ص = ٣$ (٣٥٧) $٣س - ص = ١٠$

$س^٢ + ص^٢ = ١٢٫٥$ $٩س^٢ + ص^٢ = ١١٠٫٧٥$

(٣٥٨) $س^٢ - ص^٢ = ٥٦$ (٣٥٩) $٩س^٢ - ص^٢ = ٣٥$

$س + ص = ١٤$ $٣س + ص = ٧$

(٣٦٠) $س^٢ + ص^٢ = ١٤٫٥$ (٣٦١) $٣س^٢ - ٢ص^٢ = ١٩$

$س^٢ - ص^٢ = ١٠$ $٢س^٢ + ٥ص^٢ = ٣٨$

مسائل تحل بمعادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

(٣٦٢) محيط غيط مستطيل الشكل ٥٠٠ يارده ومساحته ١٤٤٠٠ يارده مربعه فما بعداه

(٣٦٣) الفرق بين ضلعى مستطيل ٥ أمتار ومساحته ٧٥٠ مترا مربعا فما مقدار بعديه بالمتر

(٣٦٤) مساحتا قطعتى أرض مربعتى الشكل ثلاثون فدانا ومحيط الكبرى يزيد ثمانين قصبة عن محيط الصغرى فما مساحة كل قطعة على حدتها

(٣٦٥) ماطول ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية اذا كان طول الوتر ١٠ أمتار والفرق بين الضلعين متران

(٣٦٦) مستقيم ا ب طوله ١٨ سنتيمتر قسم الى جزئين مختلفين ثم أنشأ على كل منهما مربع فكانت مساحة أكبر المربعين تزيد

عن مساحة أصغرهما ٧٢ سنتمترا مربعا فما مقدار كل من الجزئين

(٣٦٧) عددان لو أضيف ضعف مربع أصغرهما الى مربع الاكبر كان الناتج ٦٦ واذا طرح ٣ أمثال مربع أصغرهما من مربع الاكبر كان الناتج ٦١ فما هما العددان

(٣٦٨) مثلث قائم الزاوية مساحته ٧٢٦ مترا مربعا وطول وتره ٥٥ مترا فما طول ضلعى القائمة

(٣٦٩) محيط مربع يزيد عن محيط مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة الاكبر تزيد عن مساحة الاصغر ٣٢٥ قدما فما ضلع كل مربع منهما

(٣٧٠) مستطيل مساحة ٧٥٠ مترا واذا زيد طوله مترا ونقص عرضه مترا تزيد مساحته أربعة أمتار فما طوله وعرض هذا المستطيل

(٣٧١) مستطيل مساحته ٣٠٠ متر مربع وقطره ٢٥ مترا فما بعداه

(٣٧٢) مربعان مجموع سطحيهما ٨٦٢١ وحاصل ضرب قطريهما ٨٥٤٠ فما طول ضلعيهما

بحمد الله وعنايته وتوفيقه ورعايته قد تم كتاب القواعد الجلية في الاعمال الجبرية مشتملا على التمارين العديدة التدريجية والمسائل المتنوعة التطبيقية التى هى غاية هذا العلم المقصودة وضالته المنشودة

وأرجو ممن يطلع فيه على زلة من الاصل أو هفوة من الطبع أن يصلحها بفكره الثاقب ويحررها برأيه الصائب وليكن غرضه المنفعة والاصلاح ما استطاع وما توفيقنا الا بالله جعله الله خالصا لوجهه الكريم ونفع به النفع العميم والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله مسك الختام

يقول المتوسل بجاه النبى المصطفى خادم التصحيح الفقير الى الله تعالى محمود مصطفى

حمدا لمن جبر كل كسير وحل كل معضل عسير وعلت آلاؤه عن الوقوف عند حد وأفاض ضروب نعمائه على كل فرد وصلاة وسلاما على سيدنا محمد أس الكمال الحائز لأعلى رتب الجمال والجلال المؤسسة قوانين نبوته على أوضح برهان وأحسن دلاله وعلى آله وأصحابه الماحين بعوامله أصول الضلاله أما بعد فقد تم طبع الكتاب الشافى الذى هو بالمهم من الجبر وافى الجامع لفرائده بأسلوب يقرب تناوله الشامل لفوائده بانموذج يسهل على الافهام تداوله المسمى بالقواعد الجلية فى الاعمال الجبرية على نفقة مؤلفه الماهر المنطيق ذى التحقيق والتدقيق خدين كل وصف نفيس حضرة محمد أفندى ادريس أدام الله سعده وقوى عزه ومجده وذلك فى المطبعة الزاهره ببولاق مصر القاهره فى ظل الحضرة البهيه والطلعة السامية السنيه رب السيف والقلم حليف الحلم والحكم المحفوظ بالسبع المثانى أفندينا المعظم

(عباس باشا حلمي الثاني) لازال عمنا بولي عهده شمس سماء مجده
وسعده ملحوظا هذا الطبع الجليل والشكل الظريف الجميل
بنظر من عليه جميل أخلاقه يثني حضرة وكيل المطبعة محمد بك حسني
في أواسط شهر الله المعظم رجب الفرد الاصب الاصم
من العام الثامن عشر بعد الثلثمائة والالف من
هجرة من خلقه الله على أكمل
وصف عليه الصلاة والسلام
ما لاح بدر تمام وفاح
مسك ختام

صواب الخطأ الذي وجد في كتاب القواعد الجلية في الأعمال الجبرية

صحيفة	سطر	خطأ	صواب
٤	٦	٢	٣
٧	٢١	٧٢	٧٤
١٤	١٣	$٢ حـ ى^{٣}$	$٣ حـ ى^{٢}$
١٤	١٨	ايجاز	ايجاد
١٧	١٩	ى هـ	$ى^{٤} هـ$
٢١	١	$٣ أ^{٢} ن^{٥}$	$٣ أ^{٣} ن^{٥}$
٢١	١١	$\frac{٣}{٤} أ^{٣}$	$\frac{٣}{٤} أ^{٢}$
٢٢	١٤	$٨ أ^{٣} ن^{٢}$	$٨ أ^{٣} ن^{٥}$
٢٤	٦	$٥ أ^{١}$	$٥ س^{٣}$
٢٤	١٢	$٢ أ^{٢} ب^{٢}$	$٢ أ^{٢} ب^{٣}$
٣٠	٥	$(حـ - ى^{٢})$	$(حـ - ى)^{٢}$
٣٥	٥	$٧ حـ ى^{٣} هـ$	$٧ حـ ى^{٣} هـ$
٣٧	١٠	$(حـ + ى - هـ ب)$	$(حـ + ى - هـ) ب$
٤٠	١٨	$- ١٥ حـ ى^{٣} و$	$- ١٥ أ حـ ى^{٣} و$
٤٢	٥	باس	باسه
٤٢	١١	$١٨ حـ^{٣} ى^{٢}$	$٨ حـ^{٣} ى^{٢}$
٤٥	٢	$- س حـ$	$- س حـ^{٢}$
٥١	١٨	نفرض أن $حـ = ٤$	تحذف وتضاف لتمرين ٧١
٥٢	٩	$- ٧ حـ^{٤} ى$	$+ ٧ حـ^{٤} ى$

صحيفة	سطر	خطأ	صواب
٥٢	٩	٤ ح ء^{٣}	٤ ح^{٤} ء^{٣}
٥٢	١١	٦ ب	٦ ب^{٦}
٥٢	١١	٣٦ ح	٣٦ ح^{٦}
٥٢	١٣	− ٤ ب ح	− ٤ ب ح + ٦ ح^{٢}
٥٢	١٦	٢٢ ء^{٨}	٣٢ ء^{٨}
٦٠	٩	هـ^{٢}	٤ هـ^{٢}
٦٣	٧	$\frac{\text{هـ}}{\text{٩ ء هـ}}$	$\frac{\text{ح}}{\text{٩ ء هـ}}$
٦٤	٧	(٨٧) النمرة المتسلسله لمادة الكتاب وهكذا ما بعدها من النمر الى ١٠٧	(٩٣) وهكذا باضافة ٦ الى كل نمرة لغاية نمرة ١٠٧ فجعل ١١٣
٦٦	٥	س^{٢} + ح (فى البسط والمقام)	س^{٢} + ح^{٢} (فى البسط والمقام)
٧٥	٢١	١٥١	١٥٦
٧٨	١٤	$\frac{\text{س} - ١}{٥}$	$\frac{\text{س} - ١}{٥}$
٧٨	١٥	$\frac{\text{س} - ٤}{٥}$	$\frac{\text{س} + ٤}{٥}$
٨١	٢١	(م − ٥)	(م − ٦)
٨٩	٩	٢٠	٢
٩٤	٩	١٥ ٪	١٠ ٪
٩٥	٩	١٢	١٦
١٠١	٩	مجاهل	مجاهيل
١٠٥	٥	+ ن	− ن

صحيفة	سطر	خطاء	صواب
١٢٧	١	المستحيلة	والمستحيلة
١٤٥	١٩	٦٠	٦٤
١٤٥	٢٠	٧	١٧
١٤٦	١	$\frac{س^{٢} + ١}{س^{٣}}$	$\frac{س^{٢} - ١}{س^{٣}}$
١٤٦	٧	$\frac{ح - ب}{ء^{٢} س}$	$\frac{ح + ب}{ء^{٢} س}$